

Интуиционистское исчисление высказываний

Язык интуиционистской логики высказываний такой же, как и у классической: формулы строятся из множества переменных $\text{Var} = \{p, q, r, \dots\}$ с помощью логических связок \vee (“или”), \wedge (“и”), \rightarrow (импликация), \neg (отрицание)

Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(A \wedge B) \rightarrow A; (A \wedge B) \rightarrow B$
4. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
5. $A \rightarrow (A \vee B); B \rightarrow (A \vee B)$
6. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
8. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Правило вывода (modus ponens): из посылок A и $A \rightarrow B$ выводится заключение B .

Если формула A выводится в этом исчислении из множества посылок (гипотез) Γ , пишем $\Gamma \vdash A$.

Моделью Крипке называется тройка $\mathcal{M} = (W, \preceq, v)$, где:

- W — непустое множество “возможных миров”;
- \preceq — отношение частичного порядка (рефлексивное и транзитивное отношение) на W ;
- $v: W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ — оценка переменных. Предполагается, что функция v монотонна, т.е. если $v(x, p) = 1$ и $x \preceq y$, то $v(y, p) = 1$.

Истинность формулы A в данном мире x модели Крипке \mathcal{M} (обозначение: $\mathcal{M}, x \vDash A$) определяется индуктивно:

- $\mathcal{M}, x \vDash p \iff v(x, p) = 1$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \vee B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A \text{ или } \mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \wedge B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A \text{ и } \mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \rightarrow B) \iff$ для всех $y \succeq x$ (если $\mathcal{M}, y \vDash A$, то $\mathcal{M}, y \vDash B$);
- $\mathcal{M}, x \vDash \neg A \iff$ для всех $y \succeq x$ ($\mathcal{M}, y \not\vDash A$).

Теорема о корректности. Всякая формула, доказуемая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна во всех мирах всех моделей Крипке.

Теорема о полноте. Всякая формула, истинная во всех мирах всех моделей Крипке, доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

Теорема о полноте относительно конечных моделей. Всякая формула, истинная во всех мирах всех конечных моделей Крипке (т.е. моделей с конечным множеством возможных миров W), доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

1. Докажите, что истинность произвольных формул в модели Крипке монотонна: если $\mathcal{M}, x \vDash A$ и $y \succeq x$, то $\mathcal{M}, y \vDash A$. (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по структуре формулы A .)

2. *Теорема о дедукции.* Докажите, что если $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по длине вывода.)

3. Какие из следующих формул доказуемы в интуиционистском исчислении высказываний, а какие — нет?

а) $p \rightarrow \neg\neg p$; б) $\neg\neg p \rightarrow p$; в) $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$; г) $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$; д) $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; е) $p \vee \neg p$;

ж) $\neg\neg(p \vee \neg p)$; **з)** $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$; **и)** $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$; **к)** $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$; **л)** $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$; **м)** $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$; **н)** $((((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$.

4. Существует ли замкнутый λ -терм типа $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$?

5. *Дизъюнктивное свойство.* Докажите, что если формула $A \vee B$ доказуема в интуиционистском исчислении высказываний, то в нём же доказуема или формула A , или формула B (или, возможно, обе). Обладает ли этим свойством классическая логика?

6. *Теорема Гливенко.* Докажите, что A является классической тавтологией тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

7. Существует ли формула, истинная во всех моделях Крипке, для которых \preceq есть линейный порядок, но не доказуемая в интуиционистском исчислении высказываний?

8. Придумайте формулу от одной переменной p , опровергаемую на некоторой модели глубины 2, но истинной на всех моделях глубины 1. Тот же вопрос для глубины 3 (соответственно, 2). (Глубиной модели считается максимальная длина цепочки вида $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_n$, где все x_i различны.)

9. Назовём множество формул Γ *дизъюнктивным*, если (1) Γ непротиворечиво (т.е. не существует такой формулы A , что $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vDash \neg A$); (2) если $\Gamma \vdash (A \vee B)$, то $A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$.

а) Докажите, что если $\Gamma \vdash A$ и Γ дизъюнктивно, то $A \in \Gamma$.

б) Докажите, что для всякого непротиворечивого множества формул Γ_0 существует дизъюнктивное множество формул Γ , содержащее Γ_0 .

в) Пусть W_0 — множество всех дизъюнктивных множеств формул. Определим на нём частичный порядок \preceq_0 следующим образом: $\Gamma_1 \preceq_0 \Gamma_2$, если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Для каждой $p \in \text{Var}$ положим $v_0(\Gamma, p) = 1 \iff p \in \Gamma$. Докажите, что $\mathcal{M}_0 = (W_0, \preceq_0, v_0)$ является моделью Крипке, причём $\mathcal{M}_0, \Gamma \vDash A \iff A \in \Gamma$.

г) Выведите отсюда теорему о полноте (см. выше).

10*. Докажите теорему о полноте относительно конечных моделей.