Интуиционистское исчисление высказываний

Язык интуиционистской логики высказываний такой же, как и у классической: формулы строятся из множества переменных $\mathrm{Var} = \{p, q, r, \dots\}$ с помощью логических связок $\vee$ (“или”), $\wedge$ (“и”), $\to$ (импликация), $\neg$ (отрицание)

Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(A \wedge B) \to A$; $(A \wedge B) \to B$
4. $A \to (B \to (A \wedge B))$
5. $A \to (A \vee B)$; $B \to (A \vee B)$
6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
8. $A \to (\neg A \to B)$

Правило вывода (modus ponens): из посылок A и $A \to B$ выводится заключение B.

Если формула A выводится в этом исчислении из множества посылок (гипотез) Γ, пишем $\Gamma \vdash A$.

Моделью Крипке называется тройка $\mathcal{M} = (W, \preccurlyeq, v)$, где:

- W — непустое множество *“возможных миров”*;
- $\preccurlyeq$ — отношение частичного порядка (рефлексивное и транзитивное отношение) на W;
- $v\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ — оценка переменных. Предполагается, что функция v монотонна, т.е. если $v(x, p) = 1$ и $x \preccurlyeq y$, то $v(y, p) = 1$.

Истинность формулы A в данном мире x модели Крипке $\mathcal{M}$ (обозначение: $\mathcal{M}, x \vDash A$) определяется индуктивно:

- $\mathcal{M}, x \vDash p \iff v(x, p) = 1$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \vee B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A$ или $\mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \wedge B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A$ и $\mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \to B) \iff$ для всех $y \succcurlyeq x$ (если $\mathcal{M}, y \vDash A$, то $\mathcal{M}, y \vDash B$);
- $\mathcal{M}, x \vDash \neg A \iff$ для всех $y \succcurlyeq x$ $(\mathcal{M}, y \nvDash A)$.

Теорема о корректности. Всякая формула, доказуемая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна во всех мирах всех моделей Крипке.

Теорема о полноте. Всякая формула, истинная во всех мирах всех моделей Крипке, доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

Теорема о полноте относительно конечных моделей. Всякая формула, истинная во всех мирах всех конечных моделей Крипке (т.е. моделей с конечным множеством возможных миров W), доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

1. Докажите, что истинность произвольных формул в модели Крипке монотонна: если $\mathcal{M}, x \vDash A$ и $y \succcurlyeq x$, то $\mathcal{M}, y \vDash A$. (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по структуре формулы A.)

2. *Теорема о дедукции.* Докажите, что если $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$. (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по длине вывода.)

3. Какие из следующих формул доказуемы в интуиционистском исчислении высказываний, а какие — нет?
а) $p \to \neg\neg p$; **б)** $\neg\neg p \to p$; **в)** $\neg\neg\neg p \to \neg p$; **г)** $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$; **д)** $\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$; **е)** $p \vee \neg p$;

ж) $\neg\neg(p\vee\neg p)$; **з)** $(p \to q)\vee(q \to p)$; **и)** $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$; **к)** $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$; **л)** $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$; **м)** $p \to ((p \to q) \to q)$; **н)** $((((p \to q) \to p) \to p) \to q) \to q$.

4. *Дизъюнктивное свойство.* Докажите, что если формула $A \vee B$ доказуема в интуиционистском исчислении высказываний, то в нём же доказуема или формула A, или формула B (или, возможно, обе). Обладает ли этим свойством классическая логика?

5. *Теорема Гливенко.* Докажите, что A является классической тавтологией тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

6. Существует ли формула, истинная во всех моделях Крипке, для которых $\preccurlyeq$ есть линейный порядок, но не доказуемая в интуиционистском исчислении высказываний?

7. Придумайте формулу от одной переменной p, опровергаемую на некоторой модели глубины 2, но истинной на всех моделях глубины 1. Тот же вопрос для глубины 3 (соответственно, 2). (Глубиной модели считается максимальная длина цепочки вида $x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_n$, где все x_i различны.)

8. Назовём множество формул Γ *дизъюнктивным,* если (1) Γ непротиворечиво (т.е. не существует такой формулы A, что $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vDash \neg A$); (2) если $\Gamma \vdash (A \vee B)$, то $A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$.

а) Докажите, что если $\Gamma \vdash A$ и Γ дизъюнктивно, то $A \in \Gamma$.

б) Докажите, что для всякого непротиворечивого множества формул Γ_0 существует дизъюнктивное множество формул Γ, содержащее Γ_0.

в) Пусть W_0 — множество всех дизъюнктивных множеств формул. Определим на нём частичный порядок $\preccurlyeq_0$ следующим образом: $\Gamma_1 \preccurlyeq_0 \Gamma_2$, если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Для каждой $p \in \mathrm{Var}$ положим $v_0(\Gamma, p) = 1 \iff p \in \Gamma$. Докажите, что $\mathcal{M}_0 = (W_0, \preccurlyeq_0, v_0)$ является моделью Крипке, причём $\mathcal{M}_0, \Gamma \vDash A \iff A \in \Gamma$.

г) Выведите отсюда теорему о полноте (см. выше).

9*. Докажите теорему о полноте относительно конечных моделей.