Просеминар по математической логике и информатике
`http://proseminar.math.ru/`

27 марта 2009 года

Клеточные автоматы

На прямой расположена бесконечная в обе стороны цепочка одинаковых *клеток*. Каждая клетка может находиться в одном из конечного числа *состояний*. В каждый момент времени $(0, 1, 2, \ldots)$ все клетки одновременно меняют своё состояние; новое состояние определяется тремя старыми — самой клетки и двух соседей. Такое устройство называется *клеточным автоматом*.

Формально: чтобы задать клеточный автомат, надо указать конечное множество состояний Q и отображение $\tau\colon Q \times Q \times Q \to Q$ (новое состояние как функция от старых состояний левого соседа, самой клетки и правого соседа). *Конфигурацией* автомата называется (бесконечная в обе стороны) последовательность состояний всех клеток (отображение $\mathbb{Z} \to Q$). На каждом шаге конфигурация меняется по правилу τ.

1. Будем считать, что среди состояний автомата есть 0 и 1. Постройте клеточный автомат с таким свойством: (1) если вначале была хоть одна единица, то со временем вся лента заполнится единицами (любая клетка рано или поздно станет 1 и останется навсегда), и (2) если вначале были одни нули, то так и останется.

2. (проверка чётности в унарной системе) Постройте клеточный автомат со следующим свойством. Если вначале было $\ldots 01^k0 \ldots$ с чётным k, то лента заполнится буквами Y, а если с нечётным k, то буквами N. (Считаем, что в алфавите есть буквы $0, 1, N, Y$ и другие, если необходимо.)

3. (проверка конечности) На ленте вначале записаны нули и единицы. Постройте клеточный автомат со следующим свойством: **а)** на ленте появляется буква Y, если вначале единиц конечное число, и не появляется иначе; **б)** на ленте появляется буква Y, если вначале единиц бесконечное число, и не появляется иначе.

4. (проверка симметрии) На ленте записано слово из нулей и единиц, окружённое символами # (до бесконечности). Постройте клеточный автомат, проверяющий является ли это слово симметричным (палиндромом); ответом должны быть буквы Y или N.

5. Постройте клеточный автомат, рисующий параболу (в “пространстве-времени”). Он имеет состояния # (*начало координат*), 0 (*нейтральное состояние*), ! (*вспышка*) и, возможно, другие. Начав с конфигурации $\ldots 000\#000 \ldots$, автомат должен работать так, чтобы для каждого $n \geq 1$ клетка номер n (направо от начала координат) переходила в состояние ! в момент n^2. (‘вспышки’ образуют параболу).

6. (задача о синхронном залпе) В шеренгу выстроены $n = 2^k$ солдат, являющихся клеточным автоматом (солдат имеет конечную память; каждую секунду он обменивается сообщениями с двумя соседями и в соответствии с полученными сигналами переходит в новое состояние). Крайние солдаты знают, что они крайние и действуют по особым правилам.

Сначала все солдаты находятся в нейтральном состоянии 0 (пока солдат и его соседи находятся в состоянии 0, он остается в состоянии 0). В некоторый момент командование переводит самого левого солдата в шеренге в состояние S (*start!*). Требуется, чтобы в какой-то момент все солдаты одновременно впервые пришли в особое состояние F (*fire!*).

Замечание: устав (внутреннее устройство солдата) не зависит от n.

7. Рассмотрим двумерный автомат с двумя состояниями (чёрные и белые клетки); на следующем шаге клетка принимает цвет, равный большинству из цветов самой этой клетки (C) и четырёх её соседей (W, E, N, S) на предыдущем шаге. Чёрных клеток конечное число.

NW	N	NE
W	C	E
SW	S	SE

а) Может ли число чёрных клеток увеличиться после однократного применения правила?

б) Может ли число чёрных клетов возрасти более чем в два раза после однократного применения правила?

в) Может ли число чёрных клетов возрасти более чем в два раза после нескольких применений данного правила?

8. а) В условиях задачи 7, пусть теперь клетка принимает цвет большинства среди трёх клеток: её самой(C), соседа сверху (N) и соседа справа (E). Изначально чёрных клеток конечное число. Докажите, что все чёрные клетки исчезнут через конечное число шагов.

б) Верно ли аналогичное утверждение для автомата, который вычисляет большинство среди клеток C,N,S?

в) …SW, NW, SE?

г) …N, SW, SE?

д) …C, SW, SE, NW, NE?

е) Докажите, что в первом пункте n чёрных клеток исчезнут через $O(n)$ шагов.

9. В условиях задачи 8а, будем теперь считать, что в начальный момент все клетки белые. *Саботажнику* разрешается нарушать правила клеточного автомата и очернять некоторые клетки (одновременно или в разные моменты времени); в общей сложности разрешается очернить n клеток.

а) Докажите, что будет $O(n^2)$ моментов времени, когда есть хотя бы одна чёрная клетка.

б) Верно ли, что в пространственно-временной диаграмме будет $O(n^2)$ чёрных клеток?

в) Верно ли, что будет лишь $O(n)$ моментов времени, когда есть хотя бы одна чёрная клетка?

10. (время жизни автомата) Изначально n клеток помещаются в состояние 1, а все вокруг в нейтральное состояние 0. Время жизни автомата — число шагов до того момента, когда останутся только нули (оно может быть бесконечным).

а) Может ли время жизни автомата быть равно n (для входа $\ldots 01^n 0 \ldots$)?

б) быть 2^n или больше (но конечным)?

в) быть 2^{2^n} или больше (но конечным)?

г) быть ровно 2^n?

д) те же вопросы в другой модели, когда есть только n клеток (и крайние клетки видят, что одного соседа нет).

11. Каждый автомат задаёт отображение множества всех конфигураций (двусторонних последовательностей состояний) в себя. Соответственно, он называется *инъективным*, если разные конфигурации переходят в разные, и *сюръективным*, если каждая конфигурация имеет прообраз.

а) Докажите, что если любое конечное подслово может появиться в конфигурации (после применения автомата), то он сюръективен.

б) Докажите, что если автомат инъективен и сюръективен (то есть каждая конфигурация имеет ровно один прообраз), то обратное отображение тоже задаётся автоматом, в котором новое состояние клетки зависит от состояний конечного числа соседей (не обязательно двух).

в) Докажите, что всякий инъективный автомат сюръективен. (Указание: если он не сюръективен, то не хватит образов по принципу Дирихле.)

г) Придумайте алгоритм определения по таблице автомата, сюръективен ли он.

д) Придумайте алгоритм определения по таблице автомата, инъективен ли он.