

λ-исчисление

λ-термы образуются из переменных (x, y, z, \dots) с помощью двух операций: *применения*: (uv) и *абстракции*: $\lambda x.u$. При записи λ-термов мы придерживаемся следующих соглашений: скобки ассоциируются налево (" uvw " читается как $(uv)w$, а не как $u(vw)$); применение связывает сильнее, чем абстракция (" $\lambda x.uv$ " значит $\lambda x.(uv)$, а не $(\lambda x.u)v$).

Абстракция $\lambda x.u$ *связывает* переменную x (в том же смысле, как в классической логике предикатов переменную связывают кванторы $\forall x$ и $\exists x$). Несвязанные переменные называются *свободными*. Связанные переменные можно переименовывать; термы, отличающиеся только именами связанных переменных, назовём α -равными ($u_1 =_\alpha u_2$), и такие термы мы будем отождествлять. Термы, не содержащие свободных переменных (т.е. термы, в которых все переменные связаны с помощью λ), будем называть *замкнутыми*.

Процесс вычисления значения λ-терма называется β -редукцией: $(\lambda x.u)v \rightarrow_\beta u[x := v]$. Здесь запись $u[x := v]$ означает результат замены всех свободных вхождений x в терм u на v ; при этом, чтобы избежать коллизий, связанные переменные терма u при необходимости переименовываются. β -редукцию можно применять к произвольному подтерму данного терма, если этот подтерм имеет вид $(\lambda x.u)v$.

Два терма называются β -эквивалентными ($u =_\beta v$), если они приводятся с помощью β -редукций к одному и тому же терму w .

Отношение $=_\beta$ можно определить и по-другому, с помощью исчисления. Базовые эквивалентности суть следующие: $u_1 =_\beta u_2$, если они α -эквивалентны (в частности, $u =_\beta u$), и $(\lambda x.u)v =_\beta u[x := v]$.

Правила:

$$\frac{u_1 =_\beta u_2}{u_1 v =_\beta u_2 v} \quad \frac{u_1 =_\beta u_2}{v u_1 =_\beta v u_2} \quad \frac{u_1 =_\beta u_2}{\lambda x.u_1 =_\beta \lambda x.u_2} \quad \frac{u_1 =_\beta u_2 \quad u_2 =_\beta u_3}{u_1 =_\beta u_3}$$

Правила читаются следующим образом: если мы уже установили эквивалентность(-сти) над чертой, то при помощи данного правила мы можем утверждать эквивалентность под чертой.

1. Докажите, что если $u \rightarrow_\beta v$, то множество свободных переменных терма u содержит множество свободных переменных терма v . Бывает ли это включение строгим?

Некоторым λ-термам можно присписать *типы*. Множество типов строится из *базовых типов* p, q, r, \dots с помощью операции \rightarrow . Интуитивно тип $A \rightarrow B$ состоит из *отображений (функций)* из A в B (более точно см. в конце листка).

Приписывание типов начинается с того, что каждой переменной присваивается некоторый тип (не обязательно базовый). При этом у всех вхождений переменной в терм тип будет один и тот же. Далее типы сложных термов определяются индуктивно: если x — переменная типа A , а терму u приписан тип B , то терму $\lambda x.u$ приписывается тип $A \rightarrow B$; если термам v и u приписаны типы $A \rightarrow B$ и A соответственно, то терму (vu) приписывается тип B . Если же типы термов v и u не согласованы так, как указано выше, терм (vu) остаётся без типа.

Как видно из определения, тип терма (и, в частности, приписан ли терму вообще какой-то тип) зависит от того, какие типы присвоены переменным. Терм u называется *типизуемым*, если существует такое присваивание типов переменным, что при нём u приписывается некий тип. Бывают нетипизуемые λ-термы, например, (xx) .

2. Существуют ли такие замкнутые λ-термы u и v , что $u \rightarrow_\beta v$, при этом терм v типизуем, а u — нет?

3. Постройте замкнутые λ-термы следующих типов: **а)** $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$; **б)** $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$; **в)** $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$; **г)** $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$; **д)** $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$; **е)** $((((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$.

Нетипизуемые λ-термы доставляют ряд забавных примеров. Например, терм $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ редуцируется к самому себе (и, тем самым, процесс его редукций бесконечен). Терм $y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ является *комбинатором неподвижной точки*: для любого λ-терма g имеет место эквивалентность $g(yg) =_\beta yg$. Этот терм называется *комбинатором Карри*.

4. Докажите, что комбинатор Тьюринга $\mathbf{t} = (\lambda x.\lambda y.y(xxy))(\lambda x.\lambda y.y(xxy))$ также является комбинатором неподвижной точки.

5. а) Постройте такой λ -терм s , что $stu =_{\beta} ut$ для любых t и u . б) Постройте такой λ -терм s , что $st =_{\beta} ss$ для любого t .

6. Существует ли λ -терм v , для которого $\lambda x.v =_{\beta} v$, где x — переменная, не входящая в v ?

7*. Докажите, что не существует такого λ -терма f , что для любых двух термов s и t имеет место эквивалентность $f(st) =_{\beta} s$.

8. Пусть $\mathbf{k} = \lambda x.\lambda y.x$ и $\mathbf{i} = \lambda z.z$. Добавим к исчислению, задающему отношение $=_{\beta}$, ещё одну базовую эквивалентность: $\mathbf{k} = \mathbf{i}$. Докажите, что полученная система будет *противоречивой*, т. е. для двух произвольных термов u и v в ней будет доказуема их эквивалентность.

Подсказка. Докажите, что в этой системе всякий терм будет эквивалентен комбинатору \mathbf{i} .

Определим *теоретико-множественную интерпретацию* типов и типизуемых λ -термов. Каждому типу A сопоставим множество D_A так, что для любых типов B и C множество $D_{B \rightarrow C}$ есть множество функций из D_B в D_C ; для базовых типов соответствующие множества D_p произвольны. Если u — терм типа A , сопоставим ему элемент $\llbracket u \rrbracket$, определяемый следующим образом: интерпретации свободных переменных произвольны; $\llbracket uv \rrbracket = \llbracket u \rrbracket(\llbracket v \rrbracket)$; $\llbracket \lambda x.u \rrbracket$ есть функция $a \mapsto \llbracket u[x := a] \rrbracket$. Как отмечалось выше, терм может иметь несколько типов — тогда для каждого типа ему будет соответствовать своя интерпретация (более аккуратно было бы писать $\llbracket u \rrbracket_A$).

9. Пусть тип B интерпретируется двухэлементным множеством $\{0, 1\}$. Сколько элементов содержит множество, являющееся интерпретацией типа $((B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B$?

10. Пусть u — терм типа A . Докажите, что $\llbracket u \rrbracket_A \in D_A$ (и, в частности, что определение $\llbracket u \rrbracket_A$ корректно).

Добавим к базовым эквивалентностям принцип *η -эквивалентности*: $\lambda x.(fx) =_{\eta} f$, если x не входит в f как свободная переменная. Получившееся (в результате применения правил) отношение эквивалентности обозначим $=_{\beta\eta}$.

11*. Докажите теорему о *теоретико-множественной полноте* λ -исчисления: $u =_{\beta\eta} v$ тогда и только тогда, когда $\llbracket u \rrbracket = \llbracket v \rrbracket$ при любой интерпретации.

12. а) Докажите, что если существует замкнутый λ -терм u типа A , то при любой интерпретации переменных интерпретация типа A будет непустым множеством. (Например, даже если p интерпретируется пустым множеством, в интерпретации типа $p \rightarrow p$ будет существовать (единственная) функция $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$, график которой пуст.)

б) Докажите, что если существует замкнутый λ -терм u типа A , то A , если рассмотреть его как формулу логики высказываний, является классической тавтологией.