Комбинаторы и лямбда-исчисление, часть 2

1. Определим булевы значения как комбинаторы $\mathbf{true} = \mathbf{K} = \lambda xy.x$ и $\mathbf{false} = \lambda xy.y$.
   (a) Определите комбинатор условного перехода **If** такой, что $\mathbf{If}\,\mathbf{true}\,xy \twoheadrightarrow x$ и $\mathbf{If}\,\mathbf{false}\,xy \twoheadrightarrow y$;
   (b) Определите логические операции and, or, not как комбинаторы. Каким редукциям они должны удовлетворять?

2. (a) Определить упорядоченную пару $[M, N]$ как терм $\lambda x.xMN$. Укажите комбинаторы левой **left** и правой **right** проекции такие, что $\mathbf{left}[M, N] \twoheadrightarrow M$ и $\mathbf{right}[M, N] \twoheadrightarrow N$.
   (b) Определите аналогичные комбинаторы для упорядоченных наборов из n элементов.

3. Определим цифры: $d_0 = \mathbf{I}$; $d_{n+1} = [\mathbf{false}, d_n]$.

   Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется λ-*определимой*, если существует комбинатор F такой, что для всех $n_1, \dots, n_k$ и $m = f(n_1, \dots, n_k)$ имеем

$$Fd_{n_1} \dots d_{n_k} \twoheadrightarrow d_m.$$

   (a) Докажите λ-определимость следующих функций: все константы, функция последователя $x \mapsto x + 1$ и предшественника.
   (b) Докажите, что класс λ-определимых функций замкнут относительно композиции.
   (c) Докажите замкнутость класса λ-определимых функций относительно примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}) \\ f(n + 1, \vec{x}) = h(f(n, \vec{x}), n, \vec{x}). \end{cases}$$

   Указание: воспользуйтесь леммой о неподвижной точке.
   (d) Докажите замкнутость класса λ-определимых функций относительно минимизации:

$$f(n) = \min m.g(n, m) = 0,$$

   где g — данная всюду определённая функция.