Исчисление Ламбека

Множество всех непустых конечных слов в алфавите Σ обозначается Σ^+. Пустое слово обозначается Λ. $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\Lambda\}$. *Язык* над алфавитом Σ — это произвольное подмножество множества Σ^*. Для любых $A, B \subseteq \Sigma^+$ обозначим $A \cdot B = \{uv \colon u \in A,\ v \in B\}$, $A / B = \{w \in \Sigma^+ \colon \{w\} \cdot B \subseteq A\}$, $A \setminus B = \{w \in \Sigma^+ \colon A \cdot \{w\} \subseteq B\}$.

1. Пусть $\Sigma = \{a, b, c\}$. Опишите следующие множества: **а)** $\{ac, ca\} \cdot \{a, b, cb\}$; **б)** $\{a^n b^n \colon n > 0\} \cdot \varnothing$; **в)** $\{abcc, ccaccbc, cc, ccc\} / \{cc\}$; **г)** $\{abba, baa, bac\} / \{a, c\}$; **д)** $\{aa, aaa\} \setminus \{ab, aab, aaab, aaaab, aaa, aaaa\}$; **е)** $\{a^n b^n \colon n > 0\} \cdot \{b^k \colon k > 0\}$; **ж)** $\{a^n b^m \colon 0 < n < m\} / \{b^k \colon k > 0\}$; **з)** $\varnothing \setminus \{aa, bb\}$; **и)** $\varnothing \setminus \varnothing$; **к)** $\Sigma^+ / \{a^n b^n \colon n > 0\}$.

2. Верно ли, что для всех $K, L, M \subseteq \Sigma^+$ справедливо **а)** $(K \cdot L) \cdot M = K \cdot (L \cdot M)$? **б)** $L \cdot M = M \cdot L$?

3. Существуют ли такие конечные множества $L, M \subseteq \{a, b, c\}^+$, что **а)** $|L \cdot M| > |L| \cdot |M|$? **б)** $|L \cdot M| < |L| \cdot |M|$? **в)** $|L / M| > |L|$?

4. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$ и $L = \{a^m b a^n \colon 0 \leqslant m < n\}$. Верно ли, что **а)** $L \setminus (L \cdot L) = L$? **б)** $(L \cdot L) / L = L$?

5. Верно ли, что для всех $L, M \subseteq \Sigma^+$ справедливо **а)** $(L / M) \cdot M \subseteq L$? **б)** $L \subseteq (L / M) \cdot M$? **в)** $L \subseteq (L \cdot M) / M$? **г)** $M \subseteq (L / M) \setminus L$? **д)** $(L / M) \setminus L \subseteq M$? **е)** $L / (M / M) \subseteq L$?

6. Верно ли, что для всех $K, L, M \subseteq \Sigma^+$ справедливо **а)** $(L / L) \cdot L = L$? **б)** $(L / L) \setminus L = L$? **в)** $(K \setminus L) / M = K \setminus (L / M)$? **г)** $K / (L \cdot M) = (K / L) / M$? **д)** $K / (L \cdot M) = (K / M) / L$? **е)** $((L \cdot M) / M) \cdot M = L \cdot M$? **ж)** $L / ((L / M) \setminus L) = L / M$? **з)** $(L / L) \setminus (L / L) = L / L$?

7*. Рассмотрим уравнения, подобные приведённым в задаче 6 (слева и справа от знака равенства правильно построенные выражения, составленные из переменных K, L, M и т. д. с помощью знаков $\cdot$, $/$, $\setminus$ и скобок). **а)** Существует ли (быстрый) алгоритм, устанавливающий, является ли данное уравнение тождеством? **б)** Существует ли уравнение, верное для всех автоматных языков, но не являющееся тождеством? **в)** Существует ли уравнение, верное для всех конечных и коконечных языков, но не являющееся тождеством? (Язык называется коконечным, если его дополнение до Σ^+ конечно.)

8. Ответить на вопросы из задачи 7 для уравнений, не содержащих ни $/$, ни $\setminus$.

9. Найти все тождества, составленные из $\cdot$, $/$, $\setminus$, $=$, длины 6 (т. е. с 6 вхождениями переменных).

10. Существуют ли такие конечные множества $L, M \subseteq \{a\}^+$, что **а)** $L \cdot M \neq M \cdot L$? **б)** $L / M \neq M \setminus L$? **в)** $|L \cdot M| < |L| + |M| - 1$?

11. Доказать, что **а)** $K \cdot L \subseteq M \iff K \subseteq M / L$; **б)** $K \cdot L \subseteq M \iff L \subseteq K \setminus M$; **в)** $K \subseteq L \ \&\ L \subseteq M \implies K \subseteq M$.

12. Теорема 1. Все универсальные законы, составленные из $\cdot$, $/$, $\setminus$, $\subseteq$, можно вывести из аксиом $L \subseteq L$, $(K \cdot L) \cdot M \subseteq K \cdot (L \cdot M)$, $K \cdot (L \cdot M) \subseteq (K \cdot L) \cdot M$ с помощью подстановки и правил, приведённых в задаче 11, без привлечения определений операций $\cdot$, $/$, $\setminus$. (Эта система аксиом и правил называется *исчислением Ламбека*.) **а)** Найти такие выводы для универсальных законов из задачи 5. **б)** Найти такие выводы для универсальных законов из задачи 6 (вместо каждого равенства надо вывести два утверждения о включении). **в)** Существует ли закон, универсальный для $\Sigma = \{a\}$, но не для $\Sigma = \{a, b\}$? **г)** Существует ли закон, универсальный для $\Sigma = \{a, b\}$, но не для $\Sigma = \{a, b, c, d\}$?

13. а) Найти систему аксиом и правил для универсальных законов, составленных из $\cdot$, $\subseteq$; **б)** Найти систему аксиом и правил для универсальных законов, составленных из $\cdot$, $/$, $\subseteq$.

14. Теорема 2. Все универсальные законы, составленные из $/$, $\subseteq$, можно вывести из аксиом $L \subseteq L$, $L / M \subseteq (L / K) / (M / K)$ с помощью подстановки и правил $K \subseteq L \ \&\ L \subseteq M \implies K \subseteq M$ и $L_1 \subseteq L_2 \ \&\ M_1 \subseteq M_2 \implies L_1 / M_2 \subseteq L_2 / M_1$. Найти такие выводы для следующих законов: **а)** $L / ((M / K) / (L / K)) \subseteq L / (M / L)$; **б)** $(L / M) / L \subseteq (((L / M) / M) / L) / ((L / M) / L)$.