Модальные логики

Рассматриваем *модальные пропозициональные формулы* в языке классической логики высказываний с дополнительной одноместной связкой $\Box$ (необходимо). Т.е. формулы строятся из множества переменных $\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, \dots\}$ с помощью логических связок $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$, $\Box$.

Будем использовать также производные связки:

$$\Diamond A := \neg\Box\neg A \text{ (возможно)}, \ \bot := p \wedge \neg p \text{ (ложь)}, \ \top := p \to p \text{ (истина)},$$

$$A \leftrightarrow B := (A \to B) \wedge (B \to A) \text{ (эквиваленция)}.$$

Аксиомы модального исчисления K:

1. Аксиомы классического исчисления высказываний;
2. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

Правила вывода:

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \text{ (modus ponens)}; \qquad \frac{A}{\Box A} \text{ (добавление)}.$$

Моделью Крипке называется тройка $\mathcal{M} = (W, R, v)$, где:

- W — непустое множество *„возможных миров“*;
- R — бинарное отношение на W;
- $v\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ — оценка переменных.

Пара (W, R) называется *шкалой Крипке.*

Истинность формулы A в данном мире x модели Крипке $\mathcal{M}$ (обозначение: $\mathcal{M}, x \vDash A$) определяется индуктивно:

- $\mathcal{M}, x \vDash p_i \iff v(x, p_i) = 1$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \vee B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A$ или $\mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \wedge B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A$ и $\mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \to B) \iff (\mathcal{M}, x \nvDash A$ или $\mathcal{M}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{M}, x \vDash \neg A \iff \mathcal{M}, x \nvDash A$;
- $\mathcal{M}, x \vDash \Box A \iff$ для всех y (если xRy, то $\mathcal{M}, y \vDash A$).

Формула A *общезначима* в шкале Крипке (W, R), если она истинна во всех мирах всех моделей Крипке на этой шкале. Обозначение: $(W, R) \vDash A$.

Теорема о корректности для K. Всякая формула, доказуемая в исчислении **K**, общезначима во всех шкалах Крипке.

Теорема о полноте для K. Всякая формула, общезначимая во всех шкалах Крипке, доказуема в **K**.

Теорема о финитной аппроксимируемости (полноте относительно конечных шкал) для K. Всякая формула, общезначимая во всех конечных шкалах Крипке, доказуема в **K**.

Модальные исчисления и логики

(Нормальное) модальное исчисление получается добавлением к **K** дополнительных аксиом (в виде схем). *Модальной логикой* называется множество теорем какого-нибудь модального исчисления.

Через $\mathbf{K} + \Gamma$ обозначается модальное исчисление с множеством дополнительных аксиом Γ.

Теорема о корректности для модальных исчислений. Всякая формула, доказуемая в исчислении $\mathbf{K} + \Gamma$, общезначима во всех шкалах Крипке, где общезначимы формулы из Γ.

Через $\mathbf{V}(\Gamma)$ (или $\mathbf{V}(\mathbf{K}+\Gamma)$) обозначается класс всех шкал, где общезначимы формулы из Γ (*многообразие шкал* исчисления $\mathbf{K}+\Gamma$).

Некоторые модальные исчисления:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &:= \mathbf{K} + \Box A \to A,\\
\mathbf{K4} &:= \mathbf{K} + \Box A \to \Box\Box A,\\
\mathbf{S4} &:= \mathbf{T} + \Box A \to \Box\Box A,\\
\mathbf{S5} &:= \mathbf{S4} + \Diamond\Box A \to A,\\
\mathbf{D} &:= \mathbf{K} + \Diamond\top.
\end{aligned}
$$

Если формула A выводится в исчислении X из множества формул Δ, пишем $\Delta \vdash_X A$.

Модальной логикой класса шкал $\mathcal{C}$ называется множество всех формул, общезначимых на всех шкалах из $\mathcal{C}$. Обозначение: $\mathbf{L}(\mathcal{C})$.

Модальное исчисление X называется *полным* (относительно класса шкал $\mathcal{C}$), если множество теорем X совпадает с $\mathbf{L}(\mathcal{C})$.

1. *Теоремы о дедукции.*

1. Докажите, что если $\Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{S4}} B$, то $\Delta \vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \to B$. (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по длине вывода.)

2. Сформулируйте и докажите теорему о дедукции для **K4**.

3. (*) Сформулируйте и докажите теорему о дедукции для **K**.

2. Какие из следующих формул доказуемы в **K** при всех A, B, а какие — нет?
а) $\Box A \to \Diamond A$; **б)** $\Box A \wedge \Diamond B \to \Diamond(A \wedge B)$; **в)** $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$; **г)** $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$; **д)** $\Box\Box A \to \Box A$; **е)** $\Diamond\Box A \to \Box A$.

Какие из этих формул доказуемы в **S4**?

3. Докажите, что если многообразия шкал двух модальных исчислений различны, то и множества их теорем различны (*исчисления не эквивалентны*).

4. Докажите, что исчисления **K**, **T**, **K4**, **S4**, **D**, **S5** не эквивалентны.

5. Существует ли формула, общезначимая во всех шкалах (W, R), для которых R есть линейный порядок, но не доказуемая в **S4**?

6. Формулы A,B *эквивалентны в исчислении* X, если $\vdash_X A \leftrightarrow B$. Постройте бесконечное множество формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в **K**.

7. Постройте бесконечное множество формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в **T**.

8. (*) Постройте бесконечное множество формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в **S4**.

9. *Положительная модальность* — это формула, построенная из связок $\Diamond, \Box$ и переменной p. Докажите, что в **K4** имеется бесконечно много попарно неэквивалентных положительных модальностей.

10. Сколько (с точностью до эквивалентности) положительных модальностей в **S5**?

11. (*) Тот же вопрос про **S4**.

12. Модальное исчисление называется *табличным*, если оно полно относительно некоторой конечной шкалы Крипке. Докажите, что **S5** не таблично. Выведите отсюда, что и другие исчисления, которые определены выше, не табличны.