МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА

Задачи для просеминара, март 2010

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Модальные (пропозициональные) *формулы* строятся из счетного множества пропозициональных переменных Var $=\{p, q, r, \dots\}$ при помощи обычных булевых связок ($\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$) и дополнительной одноместной связки $\Box$ (*необходимо*). Связка $\Diamond$ (*возможно*) определяется как сокращение для $\neg\Box\neg$. Используем также сокращение $(A\leftrightarrow B)$ для $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$.

Шкалой Крипке называется пара (W,R), состоящая из непустого множества W и бинарного отношения $R\subseteq W\times W$. W называется множеством *возможных миров*, R — *отношением достижимости*. *Оценкой в шкале* (W,R) называется функция, задающая значение (0 или 1) каждой пропозициональной переменной в каждом возможном мире, т.е. функция θ: Var $\times W \rightarrow \{0,1\}$. При этом тройка (W,R,θ) называется *моделью Крипке* на (W,R).

Истинность произвольной модальной формулы A в мире w модели Крипке $M=(W,R,\theta)$ определяется индукцией по длине A ("A истинна в мире w в модели M" сокращенно записывается как $M,w\vDash A$):

- $M, w \vDash A \Leftrightarrow \theta(A,w)=1$ (если A — пропозициональная переменная),
- $M, w \vDash A\wedge B \Leftrightarrow (M, w \vDash A)$ и $(M, w \vDash B)$,
- $M, w \vDash A\vee B \Leftrightarrow (M, w \vDash A)$ или $(M, w \vDash B)$,
- $M, w \vDash \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $(M, w \vDash A)$,
- $M, w \vDash A\rightarrow B \Leftrightarrow$ (если $(M, w \vDash A)$, то $(M, w \vDash B)$)
  (т.е. неверно, что $(M, w \vDash A)$ или $(M, w \vDash B)$),
- $M, w \vDash \Box A \Leftrightarrow$ для всех v (если wRv, то $M,v\vDash A$)
  (т.е. A истинна во всех мирах, достижимых из w).

Таким образом, булевы связки в каждом мире действуют по обычным таблицам истинности.

Из определения сразу получается:

$M, w \vDash \Diamond A \Leftrightarrow$ найдется v, такой что wRv и $M,v\vDash A$.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим модель Крипке M на шкале $(\mathbb{Z},<)$, такую что

$M, n\vDash p \Leftrightarrow$ n четно; $M, n\vDash q \Leftrightarrow n > 0$

В каких точках этой модели верны следующие формулы:

a) $\Diamond\Box p$

b) $\Diamond\Box q\wedge\Box\Diamond p$

c) $\Diamond(q\rightarrow\neg p)\vee\Box\Diamond(p\rightarrow q)$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

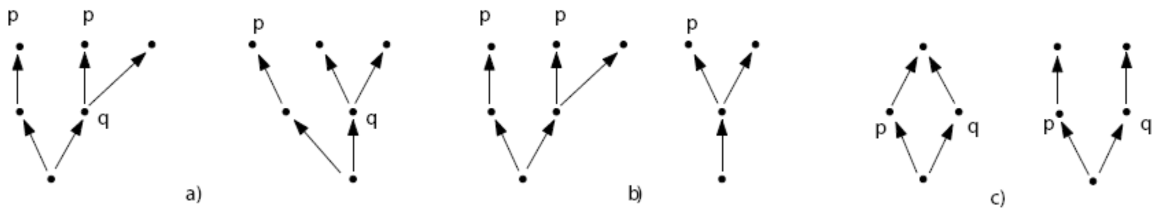
Модальная формула A называется

• *истинной в модели Крипке* M (обозначение: $M \vDash A$), если она истинна в каждом ее мире,

• *общезначимой в шкале Крипке* F (обозначение: $F \vDash A$), если она истинна в каждой модели на F.

ЗАДАЧИ

2. На рисунке приведены 3 пары моделей Крипке (миры, где истинны переменные, отмечены). В каких из этих пар можно различить нижние точки при помощи модальной формулы?



3. Покажите, что в шкале $(\mathbb{N},<)$ общезначима формула $\Box(\Box p \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$.
Общезначима ли она в $(\mathbb{Z},<)$? в $(\mathbb{Q},<)$?
4. Покажите, что в шкале $(\mathbb{N},\leq)$ общезначима формула
$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$.
Общезначима ли она в $(\mathbb{Z}, \leq)$? в $(\mathbb{Q}, \leq)$?

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Многообразием шкал (Крипке) для модальной формулы A называется класс всех шкал, где она общезначима; обозначение: V(A). Формула B называется *семантическим следствием* формулы A, если $V(A) \subseteq V(B)$. Аналогично определяется V(Γ) и семантическое следование из Γ для произвольного множества формул Γ.

Модальной логикой класса шкал $\mathcal{C}$ называется множество всех модальных формул, общезначимых во всех шкалах из $\mathcal{C}$; обозначение: $L(\mathcal{C})$. Множество всех семантических следствий формулы A (т.е. L(V(A))) называется ее *семантическим замыканием* (обозначение: Cn(A)); аналогично - для множества формул.

ЗАДАЧИ

5. Какие из следующих формул общезначимы во всех шкалах (при всех A,B):

a) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

b) $\Box A \to \Diamond A$

c) $\Box A \to (\Diamond B \to \Diamond(A \wedge B))$

e) $\Box(A \to \Box B) \to (\Box A \to \Diamond B)$

f) $\Box\Box A \to \Box A$?

d) $\Diamond(A\vee B)\leftrightarrow(\Diamond A\vee\Diamond B)$

6. Докажите, что $Cn(L(\mathcal{C})) = L(\mathcal{C})$ для любого класса шкал $\mathcal{C}$.

7. Докажите, что если $V(A)\neq V(B)$, то и $Cn(A)\neq Cn(B)$.

8. Опишите многообразия шкал для следующих формул:

a) $\Box p \to p$
b) $\Box p$
c) $\Diamond(p\vee\neg p)$
d) $\Box p \to\Diamond p$
e) $\Diamond\Box p \to p$
f) $\Box p\to\Box\Box p$
g) $\Diamond p \to\Box p$
h) $\Box\Box p\to\Box p$
i) $\Diamond\Box p\to\Box\Diamond p$

9. Докажите, что любое множество $L(\mathcal{C})$ содержит все классические тавтологии и замкнуто относительно правил подстановки, modus ponens и правила добавления $\Box$: если $A\in L(\mathcal{C})$, то $\Box A\in L(\mathcal{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Множество модальных формул со свойствами из задачи 9 называется *модальной логикой.* Логики вида $L(\mathcal{C})$ называются *полными* (существуют и неполные логики, но здесь они не рассматриваются).

Обозначения некоторых модальных логик:

K = $Cn(\varnothing)$

T = $Cn(\Box p \to p)$

K4 = $Cn(\Box p\to\Box\Box p)$

S4 = $Cn(\Box p \to p,\ \Box p\to\Box\Box p)$

S5 = $Cn(\Box p \to p,\ \Box p\to\Box\Box p,\ \Diamond\Box p \to p)$

SL = $Cn(\Box p \to\Diamond p,\ \Diamond p \to\Box p)$

ЗАДАЧИ

10. Многообразие шкал называется *минимальным,* если оно минимально по включению среди непустых многообразий. Докажите, что
многообразие $\mathcal{C}$ минимально $\Leftrightarrow$ $L(\mathcal{C})$ *максимальна* в следующем смысле: единственная полная логика, строго содержащая $L(\mathcal{C})$, *противоречива* (т.е. состоит из всех формул).

11. Докажите, что логика одноэлементной шкалы максимальна.

12. Докажите, что класс всех шкал, в которых из каждого мира достижимы не более n миров, является многообразием.

13. Пусть L_n - логика класса всех шкал мощности не выше n. Докажите, что $L_n\neq L_{n+1}$.

14. Логика конечной шкалы Крипке называется *табличной.*

a) Докажите, что **K** не таблична.

b) Докажите, что **S5** не таблична.

c) Докажите, что всякая полная логика, содержащая табличную логику, также таблична.

15. Формулы A, B называются *эквивалентными в модальной логике L*, если $(A\leftrightarrow B)\in L$. L называется *локально табличной,* если для любого конечного множества пропозициональных переменных V имеется лишь конечное число формул, построенных из V, с точностью до эквивалентности в L.

а) Докажите, что табличная логика локально таблична.
б) Докажите, что в **S5** всякая формула эквивалентна формуле в дизъюнктивной нормальной форме, в конъюнкциях которой используются литералы (т.е. переменные и их отрицания), а также формулы вида $\Diamond A$, $\neg\Diamond A$, где A - конъюнкция литералов. Выведите отсюда, что **S5** локально таблична.
в) Докажите, что в **S4** имеется бесконечно много неэквивалентных формул, построенных из одной переменной p.