Просеминар по математической логике
и информатике

17 октября 2008 года

Определимость в геометрии

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматриваются следующие предикаты:

$B(x,y,z)$	«точка y лежит между x и z»
$C(x,y,u,v)$	«расстояния между xy и uv равны»

Расстояние между x и y обозначается $|xy|$.

1. Через B выразить предикат «x,y,z лежат на одной прямой» и записать аксиому о параллельных. Выразить этот же предикат через C.
2. Выразить B через C.

   Указание: сначала выразите предикат $|xy| \le |uv|$.
3. Выражается ли C через B?
4. Отображение $f : M \to M$ *сохраняет* предикат P, если для любых $x_1, \ldots x_n \in M$ $P(x_1, \ldots x_n) = P(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. *Автоморфизмом* для набора предикатов на множестве M называем взаимнооднозначное отображение $f : M \to M$, сохраняющее все предикаты P из данного набора. Докажите, что при автоморфизмах также сохраняются все выразимые из данного набора предикаты.
5. Опишите все автоморфизмы предиката C. Выразим ли из C предикат $|xy| = 1$?
6. Опишите все автоморфизмы предиката B.
7. Опишите все одноместные предикаты, выразимые из C.
8. Пусть $D(x,y)$ означает предикат $|xy| = 1$. Выразите через D:
   (a) предикаты $|xy| = n$ и $|xy| = \sqrt{3}n$, для каждого $n \in \mathbb{N}$;
   (b) предикат $|xy| = 1/2$;
   (c) предикат $|xy| = r$, если расстояние r может быть построено с помощью одного циркуля исходя из пары фиксированных точек a, b таких, что $|ab| = 1$.
9. Пусть a, b — фиксированные точки плоскости на расстоянии 1. Отождествим прямую ab с множеством действительных чисел (где $a = 0$ и $b = 1$). Определите сложение и умножение, рассматриваемые как трёхместные предикаты на ab, через предикаты B, C, $x = a$ и $x = b$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.
10. Докажите, что на множестве действительных чисел с предикатами $x + y = z$, $x = 1$ и $x = 0$ не выразимо отношение $\le$.