Определимость в геометрии

На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматриваются следующие отношения (предикаты):
$B(x, y, z)$ — «точка y лежит на отрезке между x и z»;
$C(x, y, u, v)$ — «расстояние между x и y равно расстоянию между u и v».
Расстояние между точками x и y обозначается $|xy|$.

Говорят, что предикат P *выразим* через предикаты $P_1, \ldots, P_k$, если существует формула первого порядка φ (т.е. построенная из переменных, предикатных символов $P_1, \ldots, P_n$, логических операций — конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации — и кванторов $\forall$ и $\exists$), такая что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентно $P(x_1, \ldots, x_n)$.

1. а) Выразите через B предикат «x,y,z лежат на одной прямой» и запишите аксиому о параллельных в виде формулы первого порядка.

б) Выразите этот же предикат через C.

2. а) Выразите через C предикат $|xy| \leqslant |uv|$. **б)** Выразите B через C.

3. Выражается ли C через B?

Отображение $f\colon M \to M$ *сохраняет* предикат P, заданный на множестве M, если $P(x_1, \ldots x_n) = P(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ для любых $x_1, \ldots x_n \in M$.

Автоморфизмом для набора предикатов на множестве M называем взаимно-однозначное отображение $f\colon M \to M$, сохраняющее все предикаты из данного набора.

4. Докажите, что при автоморфизмах также сохраняются все предикаты, выразимые через предикаты из данного набора.

5. Опишите все автоморфизмы предиката C. Выразим ли через C предикат «$|xy| = 1$»?

6. Опишите все автоморфизмы предиката B.

7. Опишите все одноместные (т.е. зависящие от одной переменной) предикаты, выразимые через C.

8. Пусть $D(x, y)$ означает предикат «$|xy| = 1$». Выразите через D:

1. предикаты $|xy| = n$ и $|xy| = \sqrt{3}\,n$ (для каждого конкретного‘ $n \in \mathbb{N}$);
2. предикат $|xy| = {}^1/_2$;
3. предикат $|xy| = r$, если расстояние r может быть построено с помощью одного циркуля исходя из пары фиксированных точек a, b таких, что $|ab| = 1$.

9. Пусть a, b — фиксированные точки плоскости на расстоянии 1. Отождествим прямую ab с множеством действительных чисел (где $a = 0$ и $b = 1$). Определите сложение и умножение на прямой ab, рассматриваемые как трёхместные предикаты (т.е. предикаты «$x + y = z$» и «$x \cdot y = z$»), через предикаты B, C, «$x = a$» и «$x = b$» на плоскости $\mathbb{R}^2$.

10. Докажите, что на множестве действительных чисел отношение «$x \leqslant y$» не выразимо через отношения «$x + y = z$», «$x = 1$» и «$x = 0$».