Порядки и решётки

Бинарное отношение $\leqslant$ на множестве P называется *частичным порядком* на P, если для любых $a, b, c \in P$ выполнены следующие условия:
1) рефлексивность: $a \leqslant a$;
2) антикоммутативность: если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$;
3) транзитивность: если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Пара $(P, \leqslant)$ называется *частично упорядоченным множеством* (или, кратко, *частичным порядком*). Отношение, удовлетворяющее только условиям 1) и 3) называется *предпорядком.*

1. Определите, какие из следующих множеств являются предпорядками, а какие — частичными порядками: **а)** $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \nleqslant)$, $(\mathbb{Z}, \geqslant)$, $(\mathbb{Z}, =)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, \nless)$, $(\mathbb{R}, \neq)$, $(\mathbb{Z}, |)$, $(\mathbb{Z}_+, |)$, где $n \mid m$ есть отношение "n делит m"; **б)** $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, где $\mathcal{P}(X)$ есть множество всех подмножеств множества X; **в)** $(P, \leqslant)$, где P есть множество всех точек плоскости, а $x \leqslant y$ есть отношение "точка x лежит на прямой, проходящей через точку y и начало координат"; **г)** $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, где $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$, если $x_1 < y_1$ или $(x_1 = y_1$ и $x_2 \leqslant y_2)$; **д)** $(H, \leqslant)$, где H есть множество всех людей, а $x \leqslant y$ есть отношение "$x = y$ или x является потомком y"; **е)** (V, R), где V есть множество вершин некоторого ориентированного графа $G = (V, E)$, а vRw есть отношение "вершина w достижима из вершины v в графе G"; **ё)** $(\mathbb{R}^X, \preceq)$, где $\mathbb{R}^X$ есть множество всех функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, и $f \preceq g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$; **ж)** $(B_n, \preceq)$, где $B_n = \{0, 1\}^n$ есть множество всех булевых наборов длины n, и $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i = \overline{1, n}$; **з)** $(2^{<\omega}, \preceq)$, где $2^{<\omega}$ есть множество всех конечных строк из нулей и единиц, и $s \preceq t$, если строка s является префиксом строки t;

2. Пусть $\leqslant$ — отношение частичного порядка. Определим $a < b$ как $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Докажите, что отношение $<$ транзитивно и иррефлексивно (то есть $a < a$ не верно ни для какого a). Такое отношение называется отношением *строгого (частичного) порядка.*

3. Пусть $<$ — отношение строгого порядка. Определим $a \leqslant b$ как $a < b$ или $a = b$. Докажите, что $\leqslant$ есть отношение частичного порядка.

4. Предположим, что $(X, \preceq)$ — предупорядоченное множество. Определим на множестве X бинарное отношение $\sim$: положим $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \preceq y$ и $y \preceq x$. Докажите, что $\sim$ есть отношение эквивалентности, а фактор-множество $(X/{\sim}, \leqslant)$, где $[x]_\sim \leqslant [y]_\sim$ тогда и только тогда, когда $x \preceq y$, является частично упорядоченным. (Проверьте, что отношение $\leqslant$ определено корректно!)

5. Нарисуйте диаграммы Хассе: **а)** для всех частичных порядков на множестве из трёх элементов; **б)** множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с отношением делимости; **в)** множества из пункта б) задачи 1 для случая $X = \{0, 1, 2\}$; **г)** множества из пункта ж) задачи 1 для $n \in \{1, 2, 3\}$; **д)** множества всех натуральных делителей числа 60 с отношением делимости;

Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество и $S \subseteq P$. Элемент $a \in S$ называется *максимальным элементом* множества S, если $a \leqslant b \Rightarrow a = b$ для всех $b \in S$, и *наибольшим элементом* множества S, если $b \leqslant a$ для всех $b \in S$. Аналогично определяются *минимальные* и *наименьшие* элементы.

6. Покажите, что любой наибольший элемент является максимальным. Верно ли обратное? Докажите, что если наибольший элемент существует, то он единственен. Укажите максимальные, минимальные, наибольшие и наименьшие элементы на диаграммах из задачи 5.

7. Частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$ называется *фундированным*, если всякое непустое подмножество $S \subseteq P$ имеет минимальный элемент. Покажите, что фундированность эквивалентна *условию обрыва убывающих цепей*: для любых элементов $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ из P, удовлетворяющих $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_i \geqslant \ldots$, существует m, такое что $a_m = a_{m+1} = \ldots$. Докажите, что в таких частично упорядоченных множествах всякий элемент мажорирует некоторый минимальный элемент, т.е. для любого $a \in P$ существует $b \in P$, такой что $b \leqslant a$ и b есть минимальный элемент P.

8. Докажите, что множества из пунктов г) и з) задачи 1 являются фундированными. Является ли порядок $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ фундированным?

9. Приведите примеры частичных порядков, в которых: **а)** всякий элемент мажорирует некоторый минимальный элемент, но нарушается условие обрыва убывающих цепей; **б)** существуют минимальные элементы, но не каждый элемент мажорирует некоторый минимальный.

Элемент $a \in P$ называется *верхней гранью* множества $S \subseteq P$, если $s \leqslant a$ для всех $s \in S$. Наименьший элемент a множества всех верхних граней множества S называется *точной верхней гранью* или *супремумом* S, и обозначается $a = \sup S$. Аналогично определяются понятия *нижней грани* и *инфимума* $\inf S$. Точные грани, если они существуют, определены однозначно (проверьте!).

Частично упорядоченное множество $(L, \leqslant)$ называется *решёткой*, если для любой пары элементов $a, b \in L$ существуют $\sup\{a, b\}$ и $\inf\{a, b\}$.

10. Какие из частично упорядоченных множеств из задач 1 и 5 являются решётками? Для каждого множества из задачи 5, не являющегося решёткой, укажите пару элементов, для которых не существует $\sup\{a, b\}$ или $\inf\{a, b\}$. Приведите пример конечного частично упорядоченного множества с наибольшим и наименьшим элементами, не являющегося решёткой.

11. а) Пусть $(L, \leqslant)$ — решётка. Покажите, что операции $a \vee b = \sup\{a, b\}$ и $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ удовлетворяют тождествам:

1) ассоциативность: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;
2) коммутативность: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;
3) идемпотентность: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$;
4) поглощение: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

б) Обратно, пусть $(L, \vee, \wedge)$ — множество с двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, удовлетворяющими тождествам из пункта а). Для любых $a, b \in L$ положим $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \vee b = b$. Покажите, что $(L, \leqslant)$ — решётка.

12. Докажите, что всякая структура $(L, \vee, \wedge)$, удовлетворяющая тождествам 1), 2) и 4), также удовлетворяет и тождествам идемпотентности 3).

Элемент $a \in L$ называется $\vee$-*неразложимым*, если $a = b \vee c$ влечёт $a = b$ или $a = c$.

13. Найдите все $\vee$-неразложимые элементы решётки из пункта д) задачи 5 и решётки $(\mathbb{Z}_+, |)$.

14. Докажите, что если решётка L удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, то всякий элемент a представим в виде $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, где все $a_1, \ldots, a_k \in L$ являются $\vee$-неразложимыми.

15. Существует ли решётка, в которой каждый элемент $\vee$-разложим?

Непустое подмножество $S \subseteq L$ называется *подрешёткой* решётки $(L, \vee, \wedge)$, если оно замкнуто относительно операций $\vee$ и $\wedge$, то есть если $a, b \in S$, то $a \vee b, a \wedge b \in S$.

16. Перечислите все подрешётки решётки всех натуральных делителей числа 12.

17. Приведите пример решётки L и подмножества $S \subseteq L$, такого что S является решёткой с порядком из L ограниченным на S, но S не является подрешёткой решётки L.