P и NP. Часть 1.

Машина Тьюринга (кратко МТ) состоит из неограниченной в обе стороны ленты, поделенной на клетки с номерами $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, и управляющего устройства с конечным числом состояний, которое может считывать и записывать символы на ленте. *Программа* для МТ задается следующими компонентами: 1) конечным множеством Γ символов, которые записываются на ленте, подмножеством Σ входных символов и символом пробела $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$; 2) конечным множеством состояний Q, с выделенными начальным состоянием q_0 и двумя завершающими состояниями q_Y, q_N 3) функцией перехода $\delta\colon Q \times \Gamma \setminus \{q_N, q_Y\} \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$. На вход программа получает слово $x \in \Sigma^*$, записанное в ячейках с номерами $1, \ldots, |x|$. Программа начинает работу, находясь в состоянии q_0 и считывая ячейку 1. Процесс вычисления осуществляется шаг за шагом. На каждом шагу машина считывает значение $a \in \Gamma$ текущей ячейки, находясь при этом в некотором состоянии q. Она вычисляет значение $\delta(q, a) = (q', b, D)$, записывает в текущую ячейку символ b, переходит в состояние q', сдвигает считывающее устройство влево, если $D = L$, вправо, если $D = R$, и остается на месте, если $D = N$. Если $q' = q_Y$ или $q' = q_N$, то машина заканчивает работу, принимая или, соответственно, не принимая слово. Если же q' не является завершающим состоянием, программа переходит к следующему шагу.

Алфавитом называется произвольное конечное множество. Слово — это произвольная конечная последовательность букв алфавита. Язык — это произвольное множество слов. Язык называется *разрешимым*, если существует МТ, принимающая все слова этого языка и отвергающая слова, не лежащие в языке. Язык L называется полиномиально разрешимым, если существует машина Тьюринга M и полином $p(n)$, такие что M разрешает язык и для всякого x машина M останавливается на входе x за $p(|x|)$ шагов. Класс всех полиномиально разрешимых языков обозначается через P. Язык L называется полиномиально разрешимым с советом, если существет машина Тьюринга M и полином $p(n)$, такие что 1) если $x \in L$, то существует совет y, $|y| < p(|x|)$, такой что M принимает пару слов (x, y); 2) если $x \notin L$, то для всех y, $|y| < p(|x|)$ машина M отвергает (x, y). Класс всех полиномиально разрешимых с советом языков обозначается через NP.

1. Докажите, что следующие языки лежат в классе P: **а)** $\{0^k 1^k : k \geqslant 0\}$; **б)** $\{ww \ : w \in \{0,1\}^*\}$.

2. Придумайте, как подавать следующие языки на вход машине Тьюринга, и докажите, что они лежат в классе P: **а)** $PATH = \{\langle G, s, t\rangle$: в ориентированном графе G есть путь из s в $t\}$; **б)** $RELPRIME = \{\langle x, y\rangle : x$ и y взаимно просты$\}$.

3. Докажите, что следующие языки лежат в классе NP: **а)** $HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle$: в неориентированном графе G есть гамильтонов (проходящий по всем вершинам ровно по одному разу) путь из s в $t\}$; **б)** $CLIQUE = \{\langle G, k\rangle$: G содержит полный подграф с k вершинами$\rangle\}$; **в)** $SUBSETSUM = \{\langle S, t\rangle : S = \{x_1, \ldots, x_k\}$, и для некоторого подмножества $\{y_1, \ldots, y_l\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ выполнено $\sum y_i = t\}$.

4. Придумайте определение многоленточной машины Тьюринга. Как моделировать многоленточную машину Тьюринга с помощью одноленточной?

5. Придумайте определение двумерной машины Тьюринга. Как моделировать двумерную машину с помощью обычной?

6. Докажите, что всякий полиномиально разрешимый с советом язык разрешим. Сколько времени требуется машине на его разрешение?

7. В недетерминированной машине Тьюринга (в отличие от детерминированной) функция переходов многозначная, и разрешён переход по любому из значений. Слово принимается, если оно принимается хотя бы одним каким-нибудь способом. Докажите, что множество языков, полиномиально разрешимых на недерминированной машине Тьюринга, совпадает с множеством языков, полиномиально разрешимых с советом.

8. Все слова языка L принимаются машиной Тьюринга M за полиномиальное время, и никакие другие слова машиной M не принимаются (но, возможно, и не отвергаются). Верно ли, что L лежит в P?

9. Придумайте, как определить класс языков, разрешимых на логарифмической памяти.