Просеминар по математической логике и информатике
`http://proseminar.math.ru/`

21 марта 2014 года

P и NP. Часть 2.

Пусть дан прямоугольник R размера $m \times n$, расчерченный на клетки со стороной 1. Мы будем рассматривать замощения этого прямоугольника квадратными плитками со стороной 1, такие что каждая плитка целиком покрывает одну клетку прямоугольника. При этом стороны квадратных плиток раскрашены в цвета $\{1, \ldots, k\}$, и мы рассматриваем только такие замощения, что смежные стороны соседних плиток покрашены в один и тот же цвет. Кроме того, граница прямоугольника R разбиваются на отрезки длины 1, и эти отрезки тоже покрашены в цвета $\{1, \ldots, k\}$. Мы рассматриваем только такие замощения, что стороны плиток, смежные с границей прямоугольника, покрашены в тот же цвет, что и данный участок границы. Пусть заранее задан набор S способов возможных раскрасок границ плиток, и есть неограниченное число плиток с каждой раскраской границы из S. Теперь мы можем определить язык $TILINGCOLOR = \{\langle k, S, R\rangle :$ прямоугольник R можно покрыть плитками из S$\}$.

1. Докажите, что $TILINGCOLOR$ лежит в NP.

Символы $\wedge$, $\vee$, $\neg$ обозначают логическое И, ИЛИ и НЕ соответственно (вместо $\neg$ используют также черту сверху $\bar{\ }$). С помощью этих операций из переменных, принимающих значения ИСТИНА и ЛОЖЬ, можно составлять формулы. Например, $(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{x})$ или $(z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee z \vee \bar{y}) \wedge y$. Формула называется выполнимой, если существует такой набор присвоений переменным значений ИСТИНА и ЛОЖЬ, так что значение формулы становится ИСТИНА. $SAT = \{\langle\phi\rangle : \phi$ — выполнимая формула$\}$, $kSAT = \{\langle\phi\rangle : \phi$ — выполнимая формула, являющаяся логическим И скобок, каждая из которых есть логическое ИЛИ k переменных или их отрицаний$\}$.

2. Докажите, что SAT и $kSAT$ для любого k лежат в NP.

3. Докажите, что $2SAT$ лежит в P.

Функция $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ полиномиально вычислима, если существует такая машина Тьюринга, работающая за полиномиальное время, которая, получив на вход слово w, завершает работу со словом $f(w)$ на ленте. Мы говорим, что язык $A \subseteq \Sigma^*$ *полиномиально сводится* к языку $B \subseteq \Sigma^*$ (или, что имеет место *полиномиальная сводимость* A к B) и пишем $A \leqslant_P B$, если существует такая полиномиально вычислимая функция $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, что $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

4. **а)** Докажите, что если $A \leqslant_P B$ и $B \in$ P, то $A \in$ P. **б)** Докажите, что если $A \leqslant_P B$ и $B \in$ NP, то $A \in$ NP. **в)** Докажите, что если $A \leqslant_P B$ и $B \leqslant_P C$, то $A \leqslant_P C$.

Граф называется *независимым*, если в нем нет ребер. Определим язык $INDSET = \{\langle G, k\rangle : G$ содержит независимый подграф с k вершинами$\}$.

Вершинным покрытием в графе G называется такое множество его вершин S, что во всякую вершину вне S ведет хотя бы одно ребро из S. Определим язык $VERTEXCOVER = \{\langle G, k\rangle : G$ содержит вершинное покрытие размера не больше $k\}$.

5. Докажите следующие сводимости: **а)** $3SAT \leqslant_P SAT$; **б)** $INDSET \leqslant_P CLIQUE$; **в)** $INDSET \leqslant_P VERTEXCOVER$; **г)** $TILINGCOLOR \leqslant_P SAT$; **д)** $SAT \leqslant_P 3SAT$; **е)** $3SAT \leqslant_P INDSET$; **ж)*** $3SAT \leqslant_P HAMPATH$.

Язык A называется NP-полным, если $A \in$ NP и для любого $B \in$ NP выполнено $B \leqslant_P A$.

6. Докажите, что P = NP тогда и только тогда, когда существует NP-полный язык A такой что $A \in$ P.

7. Докажите, что если A является NP-полным, язык B лежит в NP и $A \leqslant_P B$, то B является NP-полным.

8. Докажите NP-полноту следующих языков: **а)** $TILINGCOLOR$; **б)** SAT; **в)** $3SAT$; **г)** $CLIQUE$; **д)** $INDSET$; **е)** $HAMPATH$.