P и NP. Часть 3.

Язык L принадлежит классу coNP тогда и только тогда, когда его дополнение $\{0,1\}^* \setminus L$ принадлежит классу NP.

1. Рассмотрим класс языков, для которых существует машина Тьюринга M и полиномы $p(n)$ и $q(n)$ такие что 1) если $x \in L$, то для всякого совета y, $|y| < p(|x|)$ машина M принимает пару слов (x, y); 2) если $x \notin L$, то существует y, $|y| < p(|x|)$, такой что M отвергает (x, y). При этом для всяких x и y, таких что $|y| < p(|x|)$, машина M останавливается на паре входов (x, y) за $q(|x|)$ шагов. Докажите, что этот класс языков совпадает с классом coNP.

2. Придумайте эквивалентное определение класса coNP в терминах недетерминированных машин Тьюринга.

3. Докажите, что если A является coNP-полным, язык B лежит в coNP и $A \leqslant_P B$, то B является coNP-полным.

Формула логики высказываний называется общезначимой, если для всякого набора присвоений переменным значений ИСТИНА и ЛОЖЬ, значение формулы становится ИСТИНА. Определим язык $TAUT = \{\langle\phi\rangle : \phi$ — общезначимая формула$\}$.

4. Докажите, что язык $TAUT$ является coNP-полным.

5. Докажите, что если $\mathsf{NP} \neq \mathsf{coNP}$, то $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.

6. Докажите, что если $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{coNP}$, то $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

7. Докажите, что если $SAT \in P$, то существует полиномиальный алгоритм, который по всякой формуле логики высказываний ϕ либо говорит, что формула не выполнима, либо **находит** выполняющий набор переменных.

Язык $P \in \{0,1\}^*$ называется *унарным*, если $P \subseteq \{1\}^*$.

8.* Докажите, что если существует унарный NP-полный язык, то $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Язык L называется разрешимым за экспоненциальное время, если существует машина Тьюринга M и число $k \geqslant 1$, такие что M разрешает язык и для всякого x машина M останавливается на входе x за $O(2^{n^k})$ шагов. Класс всех языков, разрешимых за экспоненциальное время обозначается через EXP. Аналогично определяется класс языков, разрешимых за экспоненциальное время недетерминированными машинами Тьюринга. Класс всех таких языков обозначается через NEXP.

9. Докажите, что если $\mathsf{EXP} \neq \mathsf{NEXP}$, то $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.

10. Докажите, что если всякий унарный язык из NP лежит в P, то $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$.

11. Докажите, что если $\mathsf{EXP} \neq \mathsf{NEXP}$, то существуют языки в NP, не лежащие в P и не являющиеся NP-полными.