Игры на графах социальных сетей

Определение. Напомним общие определения.

Игры будут задаваться в нормальной форме. У нас имеется множество игроков, у каждого из которых есть множество стратегий; если фиксированы стратегии всех игроков, известны выигрыши каждого из них. Сумма выигрышей не обязана равняться нулю.

У нас все игр будут конечны.

Для любого игрока оптимальными ответами на набор стратегий остальных игроков будут те, которые дают максимально возможный выигрыш (возможно, таких будет несколько). Равновесием Нэша называется набор стратегий, в котором каждый игрок применяет один из своих оптимальных ответов. В игре может и не быть равновесия Нэша.

Определение. Графом социальной сети мы будем называть ориентированный граф, с приписанными рёбрам положительными весами. Каждой вершине соответствует игрок.

Мы будем рассматривать некоторое конечное множество продуктов. Каждому игроку доступны некоторые из них (возможно, все) по каким-то ценам (возможно, разным для разных игроков). Игрок обязан выбрать из всех продуктов один. После этого он несёт затраты в размере цены и получает доход, равный сумме весов входяших рёбер от игроков, выбравших тот же продукт.

Такую игру мы будем называть игрой выбора.

Заметим, что выигрыш игрока не может уменьшиться от того, что некоторые другие игроки перешли на его стратегию.

1. Докажите, что если в графе нет направленных циклов, то в игре выбора есть равновесие Нэша.

2. а) Приведите пример игры выбора, в которой нет равновесия Нэша.
б) Приведите такой пример с графом, являющимся простым циклом.
в) Какая минимальная длина цикла в пункте б)?
г) Приведите пример игры выбора на простом цикле с единственным равновесием Нэша.

3. Рассматривается игра выбора на простом цикле.
а) Докажите, что множество оптимальных ответов k-го игрока зависит только от стратегии $k-1$-го.
б) Докажите, что за полиномиальное время можно перечислить все пары (a, b), где b является одним из оптимальных ответов $k+1$-го игрока на один из оптимальных

ответов k-го игрока на выбор a игроком номер $k-1$.
в) Докажите, что вопрос наличия равновесия Нэша для игр выбора на простых циклах разрешим за полиномиальное время.

Определение. Пусть даны игра выбора и набор стратегий игроков, не являющийся равновесием Нэша. Одиночным улучшением будем называть замену стратегии одного из игроков, не являющейся оптимальным ответом, на один из оптимальных ответов на набор стратегий остальных игроков.

4. Приведите пример игры выбора и набора стратегий, для которых возможно более одного одиночного улучшения.

5. Приведите пример игры выбора, в которой существует последовательность одиночных улучшений, приводящая к тому же набору стратегий, с которого началась.

6. Приведите пример игры выбора и набора стратегий в ней, таких что в игре есть равновесие Нэша, но из набора стратегий нет последовательности одиночных улучшений, приводящей к нему.

7. Приведите пример такой игры выбора, что в ней есть равновесие Нэша, но при добавлении какому-то игроку доступа к ещё одному продукту получается игра выбора без равновесия Нэша.

8. Приведите пример игры выбора и равновесия Нэша в ней, таких что можно выбрать одного из игроков и дать ему дополнительно доступ к ещё одному продукту таким образом, что равновесие нарушится и любая возможная цепочка одиночных улучшений закончится в равновесии Нэша. При этом выигрыши всех игроков должны строго уменьшиться.

См. также arXiv: 1305.5050, 1301.7592, 1211.5938