Теорема Тарского

Целью этого листка является доказательство теоремы Тарского, утверждающей, что всякая формула над $\mathbb{R}$, содержащая предикаты $=$ и $<$, константы 0 и 1, и операции $+$ и $\times$, эквивалентна некоторой бескванторной.

Диаграммой называется таблица, в каждой клетке которой записан один из трех символов: 0, $+$, $-$.

Пусть задан список из k многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами. Сопоставим с ним диаграмму высоты k. Для этого сначала отметим на числовой прямой корни всех ненулевых многочленов списка. Пусть это $\xi_1, \dots, \xi_n$. Назовем *сегментом* каждое из $2n+1$ множеств $(-\infty, \xi_1)$, $\{\xi_1\}$, (ξ_1, ξ_2), $\dots$, $\{\xi_n\}$, $(\xi_n, +\infty)$. Возьмем i-й многочлен списка и выпишем последовательно его знаки на каждом из сегментов (нетрудно понять, что внутри каждого из сегментов знак многочлена из списка не меняется). Полученная строка из символов $\{0, +, -\}$ и будет i-й строкой строящейся диаграммы.

1. Постройте диаграмму для следующих списков многочленов: **а)** 1; **б)** $x+1$; **в)** x^2+5x+6; **г)** $x^2-5x+4,\ x-2$; **д)** $x^2-5x+4,\ -x^2+7x-10$.

Рассмотрим следующие четыре операции на многочленах: 1) взятие производной; 2) деление многочлена с остатком на другой многочлен; 3) отбрасывание старшего члена; 4) взятие коэффициента при старшей степени (удобно считать, что результат этой операции – многочлен нулевой степени).

2. Предположим, что мы можем строить диаграммы многочленов степени 0, а также применять к многочленам указанные операции. Постройте диаграмму для следующих списков многочленов: **а)** $ax+b$; **б)** $ax,\ ax+b$ **в)** ax^2+bx+c; **г)** $x^2+3x+1,\ x+2$ **д)** $x^3+7x^2+16x+12$; **е)** $x^3+6x^2+11x+6,\ x^2+4x+3$.

3. Пусть мы умеем строить диаграмму всякого конечного списка многочленов с рациональными коэффициентами степени не выше $k-1$ и применять к многочленам указанные операции. **а)** Постройте диаграмму для многочлена с рациональными коэффициентами степени k. **б)** Тот же вопрос для пары многочленов степени k.

4. а) Определите понятие *замыкания* списка многочленов относительно указанных операций. **б)** Докажите, что замыкание конечного списка многочленов конечно.

Введем некоторые обозначения. Пусть задан список многочленов L. Его замыкание будем обозначать через CL. Будем называть *основой* замкнутого списка многочленов CL подсписок этого списка, образованный многочленами нулевой степени. Основу замкнутого списка CL будем обозначать через BCL.

5. Постройте замыкание и основу замыкания списков многочленов из первой задачи.

6. а) Докажите, что по списку многочленов L с рациональными коэффициентами можно построить списки CL и BCL. **б)** Докажите, что по списку многочленов L с рациональными коэффициентами и диаграмме списка BCL можно построить диаграмму L.

Для списка многочленов от переменных $x, y_1, \dots, y_l$ (с выделенной переменной x) легко определяется понятие диаграммы в точке $c_1, \dots, c_l$: полагаем $y_1 = c_1, \dots, y_l = c_l$ и рассматриваем диаграмму получающегося семейства многочленов от x с действительными коэффициентами.

7. Пусть L – следующий список многочленов: **а)** y_1x-1; **б)** $y_1x^2+y_2$; **в)** $y_1x^2+y_2,\ y_2x^2+y_1$. Постройте отображение диаграмм, которое для всякой точки переводит диаграмму BCL в этой точке в диаграмму L в этой точке.

8. Докажите, что существует алгоритм, который по произвольному списку L многочленов от $x, y_1, \dots, y_l$ с рациональными коэффициентами строит отображение, которое для всякой точки $c = (c_1, \dots, c_l)$ переводит диаграмму BCL в точке c в диаграмму L в точке c.

В двух следующих задачах предполагается, что на множестве $\mathbb{R}$ заданы рациональные константы, предикаты „равенство" и „меньше", операции сложения и умножения.

9. Пусть задана формула $\exists x A$ (где A – бескванторная). Докажите, что можно предъявить список многочленов L с рациональными коэффициентами, такой что истинность формулы A в некоторой точке определяется диаграммой списка L в этой точке.

10. а) Пусть задана формула $\exists x A$ (где A – бескванторная). Докажите, что она эквивалентна некоторой бескванторной. **б)** Докажите, что всякая формула эквивалентна некоторой бескванторной.

11. Докажите теорему Тарского.