

Машина Тьюринга.

Алфавитом называется произвольное конечное множество A . Слово в алфавите A — это произвольная конечная последовательность букв алфавита A . Множество всех слов алфавита A обозначается через A^* . Язык в алфавите A — это произвольное множество слов в алфавите A , то есть произвольное подмножество множества A^* .

Машина Тьюринга (кратко МТ) состоит из неограниченной в обе стороны ленты, поделенной на клетки с номерами $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, и управляющего устройства с конечным числом состояний, которое может считывать и записывать символы на ленте. *Программа* для МТ задается следующими компонентами: 1) конечным множеством Γ символов, которые записываются на ленте, подмножеством Σ входных символов и символом пробела $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$; 2) конечным множеством состояний Q с выделенным начальным состоянием q_0 и выделенным подмножеством F завершающих состояний; 3) функцией перехода $\delta: Q \setminus F \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$. На вход программа получает слово $x \in \Sigma^*$, записанное в ячейках с номерами $1, \dots, |x|$ (в остальных ячейках ленты при этом написан символ \sqcup). Программа начинает работу, находясь в состоянии q_0 и считывая ячейку 1. Процесс вычисления осуществляется шаг за шагом. На каждом шагу машина считывает значение $a \in \Gamma$ текущей ячейки, находясь при этом в некотором состоянии q . Она вычисляет значение $\delta(q, a) = (q', b, D)$, записывает в текущую ячейку символ b , переходит в состояние q' , сдвигает считывающее устройство влево, если $D = L$, вправо, если $D = R$, и остается на месте, если $D = N$. Если $q' \in F$, то машина заканчивает работу. Если же q' не является завершающим состоянием, программа переходит к следующему шагу. Если машина закончила работу, считывающее устройство находится в первой букве некоторого слова y в алфавите Σ , написанного на ленте, и при этом слева и справа от слова y стоит по одному пробелу, то y называется выходом машины.

Например, на сайте <http://www.phil.uu.nl/~tmarkus/tm/> есть игрушечная реализация, в которой правила пишутся так:

$$00 - A - B - 123$$

(в состоянии 0, если написано на ленте A, написать B и перейти в состояние 123);

$$123 - B - > -00$$

(в состоянии 123, если на ленте написано B, перейти вправо). В данной конкретной реализации состояния нумеруются числами, а на ленте пишутся цифры и латинские буквы.

1. Постройте машину Тьюринга, которая по данному числу x вычисляет $x+1$. При этом число x задано в **а)** унарной записи; **б)** бинарной записи.
2. Постройте машину Тьюринга, которая по данному слову σ в алфавите $\{0, 1\}$ строит слово $\sigma\sigma$.
3. (**Лемма об очистке мусора**) Докажите, что для всякой машины Тьюринга есть другая машина, которая выдает тот же выход на всяком входе, и при этом после завершения работы на ленте машины написан только выход, а вся остальная лента заполнена пробелами.
4. Придумайте определение многоленточной машины Тьюринга. Как моделировать многоленточную машину Тьюринга с помощью одноленточной?
5. Постройте машину Тьюринга (возможно, многоленточную), которая по двум натуральным числам x, y в бинарной записи вычисляет бинарную запись числа $x+y$.
6. Постройте многоленточную машину Тьюринга, которая выполняет следующие действия.
 - а) 'Переход к метке': машина сдвигает считывающее устройство вправо, пока не дойдет до специального символа (метки) на ленте. В терминах конфигураций это означает, что машина из конфигурации $\dots q_0 x \# \dots$ переходит в конфигурацию $\dots x q_1 \# \dots$. Здесь q_0, q_1 — состояния машины, $\#$ — метка, а x слово, не содержащее символа $\#$.
 - б) 'Копирование': машина копирует часть ленты в заданное место на другой ленте. В терминах конфигураций это означает, что машина из конфигурации

$$(\dots q_0 \langle u \rangle \dots, \dots q_0 \# \dots)$$

переходит в конфигурацию

$$(\dots q_1 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_1 \# u \dots).$$

Здесь q_0, q_1 – состояния машины, символы $\triangleleft, \triangleright$ являются разделителями, указывающими, какую часть ленты нужно скопировать, символ $\#$ – метка, а слово u не содержит метки и разделителей. Копирование можно производить поверх информации, записанной на второй ленте.

в) ‘Проверка равенства’: машина проверяет, совпадают ли два фрагмента лент. В терминах конфигураций это означает, что машина из конфигурации

$$(\dots q_0 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_0 \triangleleft v \triangleright \dots)$$

переходит в конфигурацию

$$(\dots q' \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q' \triangleleft v \triangleright \dots),$$

где $q' = q_1$, если $u = v$, и $q' = q_2$ иначе. Здесь q_0, q_1, q_2 – состояния машины, символы $\triangleleft, \triangleright$ являются разделителями, указывающими, какие части ленты нужно сравнить, а слова u, v не содержат разделителей.

7. Используя машины Тьюринга из прошлой задачи опишите трехленточную машину Тьюринга, универсальную для класса одноленточных машин Тьюринга. Такая машина получает на вход описание одноленточной машины Тьюринга M и слово x в бинарном алфавите, и должна вычислить результат работы M на входе x (результат – тоже слово в двоичном алфавите).