

Выразимость предикатов

k -местным предикатом на множестве M называется любое отображение множества M^k в множество $\{0, 1\}$. Если на некотором элементе M^k предикат принимает значение 1, то мы говорим, что предикат *истинен* на этом элементе, иначе говорим, что он *ложжен* на этом элементе. Примеры предикатов: $x = y$ (можно рассматривать как предикат на множествах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и т.д.), $x < y$, $x + y = z$, " x – простое число".

Неформально, будем говорить, что предикат P на множестве M *выразим* из предикатов P_1, P_2, \dots, P_k на множестве M , если мы можем высказать некоторое утверждение на русском языке, оперирующее только предикатами P_1, P_2, \dots, P_k , и такое, что оно истинно в том и только том случае, если истинен предикат P . Более точно, из всего многообразия русского языка, кроме собственно предикатов P_1, P_2, \dots, P_k , мы можем использовать только союзы **И** (его в математической логике принято обозначать \wedge или $\&$) и **ИЛИ** (который обозначают \vee), конструкции "если A , то B " (ее обозначают $A \rightarrow B$) и "не A " (это обозначается как $\neg A$), и кванторы по переменным: "для всякого x " (обозначается $\forall x$) и "существует x " (обозначается $\exists x$).

1. Выразить предикат "больше либо равно" через предикат "больше" на множестве \mathbb{Q} .
2. Можно ли 3-местный предикат "лежать между" выразить через предикат "больше" на множестве \mathbb{Q} ?
3. На множестве натуральных чисел (с нулем) из предиката $x + y = z$ выразить следующие предикаты: **а)** $x \leq y$; **б)** $x = 0$; **в)** $x = 1$; **г)** $x = N$, для всякого фиксированного N ; **д)** " x – четно".
4. Можно ли предикат "больше" выразить через 3-местный предикат $x < y < z$ на множестве **а)** \mathbb{Q} ; **б)** $[0, 1]$; **в)** \mathbb{Z} ?
5. Выразим ли предикат $xy = z$ через предикаты $x = y$, $x + y = z$, $y = x^2$ на множестве \mathbb{R} ?
6. На множестве \mathbb{R} даны предикаты $x + y = z$, $xy = z$, выразим ли через них предикат $x > 0$?
7. Можно ли через предикат $x + y = z$ на множестве \mathbb{Z} выразить **а)** предикат $x < y$; **б)** предикат $xy = z$?
8. **а)** Выразим ли предикат $x = 1$ через предикат $x < y$ на множестве \mathbb{Q} ? **б)** А через предикаты $x < y$ и $x + y = z$?
9. Выразим ли предикат $x = i$ на множестве \mathbb{C} через предикаты $x + y = z$ и $xy = z$?
10. Выразим ли предикат $y = x + 2$ через предикат $y = x + 1$ на множестве \mathbb{Z} ? А наоборот?
11. На множестве \mathbb{N} дан предикат $x|y$ (x делит y), выразимы ли следующие предикаты: **а)** $x = y$; **б)** $x = 1$; **в)** " x – простое"; **г)** $x = 2$; **д)** $x < y$?
12. Доказать, что если предикат P выразим через предикат $x < y$ на множестве \mathbb{Q} , то он выразим через $x < y$ и на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$, где a – произвольный элемент \mathbb{Q} .
13. **а)** Построить предикат P на множестве \mathbb{Q} , выразимый через предикат $x < y$, но такой, что предикат $x < y$ не выразим через P ; **б)** построить еще один такой предикат, не выразимый через предикат построенный Вами в предыдущем пункте.
14. На множестве \mathbb{N} даны предикаты $x < y$ и $z = xy$. Выразим ли предикат $z = x + y$?
15. На множестве \mathbb{N} даны предикаты $x < y$ и $x|y$ (x делит y). Выразимы ли следующие предикаты: **а)** $z = x + y$; **б)** $z = xy$?
16. На множестве \mathbb{Z} дан предикат $y = x + 1$. Выразить предикат $y = x + N$, где N – большое фиксированное число, с помощью короткой формулы (длина формулы должна быть существенно меньше N). Под длиной формулы здесь понимается количество символов в ней.