Взвешивания

Всюду в этом листке log обозначает логарифм по основанию 2.

1. Загадано число от 1 до n. Можно задавать вопросы, на которые отвечают “да” или “нет”. За какое наименьшее количество вопросов можно узнать загаданное число?

2. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

3. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

4. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти фальшивую монету?

5. Пусть теперь опять противник загадал число от 1 до n, и мы можем его спрашивать и получать ответы “да” или “нет”. Но теперь противнику разрешается соврать в 1% случаев (мы должны заранее сообщить, сколько зададим вопросов, чтобы противник мог сосчитать 1% от этого числа). Докажите, что можно узнать загаданное число за $O(\log n)$ вопросов.

Во всех следующих задачах все монеты различные. На имеющихся чашечных весах можно сравнивать только две монеты по весу.

6. Придумайте алгоритм упорядочения **а)** 3 монет за 3 взвешивания; **б)** 4 монет за 5 взвешиваний; **в)** 5 монет за 8 взвешиваний.

7. а) Докажите, что n монет нельзя упорядочить быстрее чем за $[\log n!]$ взвешиваний.
б) Докажите, что для упорядочения n монет всегда достаточно $\log n! + O(n)$ взвешиваний.

8. Докажите, что 5 монет можно упорядочить за 7 взвешиваний.

9. а) Докажите, что среди n монет можно найти самую тяжелую за $n-1$ взвешиваний.
б) Докажите, что меньшим количеством взвешиваний обойтись нельзя.

10. а) Придумайте способ найти среди n монет вторую по тяжести монету за $n + \log n + C$ взвешиваний. **б)** Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.

11. а) Докажите, что из n монет можно одновременно выбрать самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n + O(1)$ взвешиваний. **б)** Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.

12. Как найти среди n монет среднюю по весу монету за $O(n)$ взвешиваний?