Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

19 февраля 2016 года

Взвешивания (и не только)

1. Серёжа загадал натуральное число от 1 до 1000.

а) Андрей называет какое-то число, а Серёжа отвечает ему «угадал», «меньше» или «больше». За какое наименьшее число попыток Андрей гарантированно узнает задуманное число?

б) Стёпа может задавать вопросы, на которые Серёжа отвечает только «да» или «нет». Сколько вопросов понадобится в этом случае?

в) Может ли Стёпа обойтись таким же количеством вопросов, что и в пункте **б),** если он обязан задать их все сразу, то есть не использует ответы на предыдущие вопросы при выдумывании следующих?

2. Паша загадал натуральное число a от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число x, и Паша отвечает, верно ли, что x делится на a. Помогите Вите угадать a после трёх таких вопросов.

3. Среди **а)** 2^k; **б)** n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

4. Имеется **а)** 81 монета; **б)** n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти фальшивую монету?

5. Из девяти внешне одинаковых монет 7 весят по 2 г, одна — 1 г, и еще одна — 4 г. Как за 3 взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти 4-граммовую монету?

6. Имеется одна заведомо настоящая монета и 5 подозрительных, среди которых одна фальшивая (неизвестно, тяжелее она или легче настоящей).

а) Найдите фальшивую монету за два взвешивания.

б) Можно ли это сделать, если подозрительных монет 6?

в) Среди какого максимального количества монет можно выявить фальшивую за три взвешивания (никаких других монет нет)?

Во всех следующих задачах все монеты различные. На имеющихся чашечных весах можно сравнивать только две монеты по весу.

7. Придумайте алгоритм упорядочения **а)** 3 монет за 3 взвешивания; **б)** 4 монет за 5 взвешиваний; **в)** 5 монет за 8 взвешиваний.

8. а) Докажите, что n монет нельзя упорядочить быстрее чем за $[\log_2 n!]$ взвешиваний.

б) Докажите, что для упорядочения n монет всегда достаточно $\log_2 n! + O(n)$ взвешиваний.

9. Докажите, что 5 монет можно упорядочить за 7 взвешиваний.

10. а) Докажите, что среди n монет можно найти самую тяжелую за $n-1$ взвешиваний. **б)** Докажите, что меньшим количеством взвешиваний обойтись нельзя.

11. а) Придумайте способ найти среди n монет вторую по тяжести монету за $n+\log_2 n+C$ взвешиваний (для некоторой константы C, не зависящей от n). **б)** Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.

12. а) Докажите, что из n монет можно одновременно выбрать самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n + C$ взвешиваний. **б)** Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.