

Комбинаторика слов

Алфавит — это произвольное конечное множество, его элементы называются *символами* или *буквами*. *Слово* в этом алфавите — это произвольная последовательность букв этого алфавита. Слова бывают конечными и бесконечными (вправо). Пустое слово — это слово длины 0, обозначается Λ . Длина конечного слова u обозначается $|u|$, для бесконечного u полагают $|u| = \infty$; i -й символ слова u обозначают $u[i]$.

Квадратом слова u называется слово uu , *кубом* — слово uuu , аналогично определяется произвольная степень слова с натуральным показателем. Слово называется *примитивным*, если оно не является натуральной степенью никакого непустого слова. Слово *бесквадратное*, если оно не содержит квадрата никакого непустого слова. Аналогично определяется *бескубное* слово.

Слово x называется *палиндромом*, если $x = x^R$ (где x^R — слово x , записанное задом наперёд).

Слово x *периодично* с *периодом* p , где p — натуральное число, если для любого i имеем $x[i] = x[i + p]$, если $i \geq 1$ и $i + p \leq |u|$.

1. Найдите примеры слов в **а)** русском **б)** английском **в)** ещё каком-нибудь языке, являющихся квадратами, кубами, палиндромами.

2. **а)** Пусть бесконечное слово периодично с периодами p и q . Докажите, что оно периодично с периодом $\text{НОД}(p, q)$. **б)** Пусть u — слово в конечном алфавите, p и q — взаимно простые натуральные числа. Известно, что $|u| = p + q - 1$, и что слово u периодично с периодами p и q . Докажите, что u периодично с периодом 1.

3. Пусть x , y и z — слова в алфавите из двух букв, и известно, что $xy = yz$. Докажите, что найдутся такие слова u и v , что $x = uv$, $z = vu$, и $y = (uv)^n u = u(vu)^n$ для какого-то натурального n .

4. Пусть x и y — слова в алфавите из двух букв, и известно, что **а)** $xy = yx$; **б)** $xux = yxy$. Докажите, что найдётся такое слово u , что $x = u^n$ и $y = u^m$ для каких-то n и m .

5. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы было выполнено $xy = y^R x$ для слов x и y .

6. Докажите, что любое слово можно единственным образом представить в виде натуральной степени какого-то примитивного слова (называемого *примитивным корнем* слова).

7. **а)** Пусть x — примитивное слово, и $x = uv$, где u , v — непустые палиндромы. Докажите тогда, что такое представление единственно. **б)** Всегда ли такое представление существует?

8. Какое максимальное количество различных палиндромов может входить в слово длины n ?

9. Существует ли бесконечное **а)** бесквадратное слово в алфавите из двух букв? **б)** из трёх букв? **в)** бескубное слово в алфавите из двух букв?

10. Пусть A — бесконечное множество конечных слов в алфавите Σ . Докажите, что найдётся такое бесконечное слово в алфавите Σ , что сколь угодно длинное его начало является началом какого-нибудь слова из A .

11. Пусть u_i — произвольная последовательность конечных слов в алфавите $\{a, b\}$. Всегда ли можно выбрать такую подпоследовательность u_{i_k} , что для любого k слово $u_{i_{k+1}}$ получается из слова u_{i_k} **а)** добавлением в конец какого-нибудь слова; **б)** разбавлением, то есть вписыванием любых букв в любые места слова?