Комбинаторика слов

Алфавит — это произвольное конечное множество, его элементы называются *символами* или *буквами. Слово* в этом алфавите — это произвольная последовательность букв этого алфавита. Слова бывают конечными и бесконечными (вправо). Пустое слово — это слово длины 0, обозначается Λ. Длина конечного слова u обозначается $|u|$, для бесконечного u полагают $|u| = \infty$; i-й символ слова u обозначают $u[i]$.

Квадратом слова u называется слово uu, *кубом* — слово uuu, аналогично определяется произвольная степень слова с натуральным показателем. Слово называется *примитивным*, если оно не является натуральной степенью большей 1 никакого непустого слова. Слово *бесквадратное*, если оно не содержит квадрата никакого непустого слова. Аналогично определяется *бескубное* слово.

Слово x называется *палиндромом*, если $x = x^R$ (где x^R — слово x, записанное задом наперёд).

Слово x *периодично* с *периодом* p, где p — натуральное число, если для любого i имеем $x[i] = x[i+p]$, если $i \geqslant 1$ и $i + p \leqslant |u|$. Слово x *периодично, начиная с позиции* j, если указанное равенство $x[i] = x[i + p]$ выполнено при всех $i \geqslant j$.

1. Найдите примеры слов в **а)** русском **б)** английском **в)** ещё каком-нибудь языке, являющихся квадратами, кубами, палиндромами.

2. а) Пусть бесконечное слово периодично с периодами p и q. Докажите, что оно периодично с периодом НОД(p, q). **б)** Пусть u — слово в конечном алфавите, p и q — взаимно простые натуральные числа. Известно, что $|u| = p + q - 1$, и что слово u периодично с периодами p и q. Докажите, что u периодично с периодом 1.

3. Пусть x, y и z — слова в алфавите из двух букв, и известно, что $xy = yz$. Докажите, что найдутся такие слова u и v, что $x = uv$, $z = vu$, и $y = (uv)^n u = u(vu)^n$ для какого-то натурального n.

4. Пусть x и y — слова в алфавите из двух букв, и известно, что **а)** $xy = yx$; **б)** $xyx = yxy$. Докажите, что найдётся такое слово u, что $x = u^n$ и $y = u^m$ для каких-то n и m.

5. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы было выполнено $xy = y^R x$ для слов x и y.

6. Докажите, что любое слово можно единственным образом представить в виде натуральной степени какого-то примитивного слова (называемого *примитивным корнем* слова).

7. а) Пусть x — примитивное слово, и $x = uv$, где u, v — непустые палиндромы. Докажите тогда, что такое представление единственно. **б)** Всегда ли такое представление существует?

8. Какое максимальное количество различных палиндромов может входить в слово длины n?

9. Существует ли бесконечное **а)** бесквадратное слово в алфавите из двух букв? **б)** из трёх букв? **в)** бескубное слово в алфавите из двух букв?

10. Пусть A — бесконечное множество конечных слов в алфавите Σ. Докажите, что найдётся такое бесконечное слово в алфавите Σ, что сколь угодно длинное его начало является началом какого-нибудь слова из A.

11. Пусть u_i — произвольная последовательность конечных слов в алфавите $\{a, b\}$. Всегда ли можно выбрать такую подпоследовательность u_{i_k}, что для любого k слово $u_{i_{k+1}}$ получается из слова u_{i_k} **а)** добавлением в конец какого-нибудь слова; **б)** разбавлением, то есть вписыванием любых букв в любые места слова?

Подсловной сложностью слова x называется функция $P_x(n)$, равная количеству различных подслов длины n в слове x.

Бесконечное слово x над двухбуквенным алфавитом называется *словом Штурма*, если для всякого натурального k выполнено равенство $P_x(k) = k + 1$.

Рассмотрим окружность единичной длины и зафиксируем действительные числа α и ρ, такие что $0 \leq \alpha \leq 1$ и $0 \leq \rho < 1$. Рассмотрим на окружности последовательность точек с координатами $\rho, \rho{+}\alpha, \rho{+}2\alpha, \ldots, \rho{+}i\alpha, \ldots$. Сопоставим этой последовательности бесконечное слово x над алфавитом $\{0, 1\}$, такое что $x[i] = 1$ тогда и только тогда, когда $\rho + (i - 1)\alpha$ лежит на окружности в интервале $[0, \alpha)$. Бесконечное слово такого вида называется *механическим*. При этом, α называется *шагом* слова x.

Бесконечное слово u в алфавите $\{0, 1\}$ называется *сбалансированным*, если для любых двух его подслов x, y одинаковой длины, количество символов "1" в x и y отличается не больше, чем на 1.

12. Докажите, что для бесконечного слова x следующие условия эквивалентны: **1)** слово x периодично, начиная с некоторой позиции; **2)** $P_x(n) = P_x(n + 1)$ для некоторого n; **3)** $P_x(n) < n + k - 1$, где k – число различных букв в слове x; **4)** функция $P_x(n)$ ограничена сверху.

13. Рассмотрим *последовательность Фибоначчи*. Для этого положим $u_0 = 0, u_1 = 01$ и $u_{n+2} = u_{n+1}u_n$. **а)** Докажите, что все слова последовательности Фибоначчи являются началами одного и того же бесконечного слова. Это слово называется *словом Фибоначчи*. **б)** Является ли слово Фибоначчи периодическим? **в)** Является ли слово Фибоначчи механическим? **г)** Является ли слово Фибоначчи словом Штурма?

14. Докажите, что слово в двухбуквенном алфавите $\{0, 1\}$ периодично тогда и только тогда, когда оно является механическим с рациональным шагом.

15. Докажите, что слово x является словом Штурма тогда и только тогда, когда оно является сбалансированным и не является периодическим ни с какой позиции.

16. Докажите, что слово является словом Штурма тогда и только тогда, когда оно является механическим с иррациональным шагом.