16 октября 2015 года

Комбинаторика слов

Алфавитом называется произвольное конечное непустое множество; его элементы называются *символами* или *буквами*. *Слово* в данном алфавите — это произвольная последовательность букв этого алфавита. Слова бывают конечными и бесконечными (точнее, *бесконечными вправо)*). Количество символов *(длина)* конечного слова u обозначается $|u|$; для бесконечного слова $|u| = \infty$. Пустое слово (слово нулевой длины) обозначается Λ. i-й символ слова u будем обозначать $u[i]$ (нумерация символов начинается с единицы).

Через u^n обозначается слово $\underbrace{uu\ldots u}_{n\text{ раз)}}$ $(u^0 = \Lambda)$.

Слово u *периодично с периодом* p $(p > 0)$, если для любого i от 1 до $|u| - p$ верно $u[i] = u[i + p]$.

1. а) Пусть бесконечное слово периодично одновременно с периодом p и с периодом q. Докажите, что оно периодично с периодом НОД(p, q).

б) Верно ли это утверждение для конечных слов?

2. а) Пусть x, y и z — конечные слова в алфавите из двух букв, причём $xy = yz$. Докажите, что найдутся такие слова u и v и натуральное число n, что $x = uv$, $z = vu$, и $y = (uv)^n u$.

б) Верно ли это утверждение для трёхбуквенного алфавита?

3. Пусть конечные слова x и y таковы, что **а)** $xy = yx$; **б)** $xyx = yxy$. Докажите, что существует такие слово z и натуральные числа m и n, что $x = z^m$ и $y = z^n$.

4. Пусть x, y, z — конечные слова, слово xy периодично с периодом p, слово yz периодично с периодом q, и $|y| = k$. Для каких k (при фиксированных p и q) слово xyz непременно будет периодичным с периодом НОД(p, q)?

Конечное слово называется *примитивным,* если оно не представляется в виде v^n ни для какого $n > 1$.

Конечное слово v называется *палиндромом*, если $v = v^{\mathrm{R}}$ (v^{R} — слово v, записанное задом наперёд).

5. Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы для слов x и y выполнялось условие $xy = y^{\mathrm{R}}x$.

6. Докажите, что любое слово можно единственным образом представить в виде u^n, где u — примитивное слово (называемое *примитивным корнем* исходного слова).

7. Докажите, что если слово xy примитивно, то слово yx также примитивно.

8. а) Пусть x — примитивное слово, и $x = uv$, где u и v — непустые палиндромы. Докажите, что такое представление единственно. **б)** Для любого ли примитивного слова такое представление существует?

Слово называется *бесквадратным* (соответственно *бескубным)* если оно не содержит подслова вида uu (соответственно, uuu).

9. а) Существует ли бесконечное бесквадратное слово в алфавите из двух букв?
б) Существует ли бесконечное бескубное слово в алфавите из двух букв?
в) Существует ли бесконечное бесквадратное слово в алфавите из четырёх букв?